● 수학 영역 ●

정 답

1	③	2	④	3	③	4	④	5	②
6	①	7	②	8	⑤	9	①	10	④
11	①	12	⑤	13	②	14	③	15	②
16	10	17	22	18	110	19	102	20	24
21	6	22	29						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 값을 계산한다.

$2^{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1} = 2^{\sqrt{2}} \times 2^{-\sqrt{2}+1} = 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}+1} = 2$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x) = 6x^2 + 3$ 이므로

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \times 2 = 2f'(0) = 2 \times 3 = 6$$

3. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 항을 구한다.

$a_2 = b_2$ 에서 $a_1 + 3 = b_1 \times 2$

즉 $a_1 - 2b_1 = -3$ …… ㉠

$a_4 = b_4$에서 $a_1 + 3 \times 3 = b_1 \times 2^3$

즉 $a_1 - 8b_1 = -9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1 = -1$, $b_1 = 1$

따라서 $a_1 + b_1 = 0$

4. [출제의도] 사잇값의 정리를 이용하여 함숫값을 구한다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 0, m, n 이고

m, n 은 자연수이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(1)f(3) < 0$ 에서 $f(2) = 0$

$f(3)f(5) < 0$ 에서 $f(4) = 0$

$f(x) = x(x-2)(x-4)$ 이므로 $f(6) = 6 \times 4 \times 2 = 48$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$$\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{2}{1-\cos^2\theta} = \frac{2}{\sin^2\theta} = 18$$

$\sin^2\theta = \frac{1}{9}$ 이고 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin\theta < 0$ 이므로

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$

6. [출제의도] 정적분을 활용하여 넓이를 구한다.

구하는 부분의 넓이는

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 + x\right]_0^3 = 3 + 3 = 6$$

7. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 등차수열의 항을 구한다.

$S_7 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7 = 0$

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$a_5 = a_6 - d$, $a_7 = a_6 + d$ 에서

$(a_6 - d) + a_6 + (a_6 + d) = 3a_6 = 0$, 즉 $a_6 = 0$

$S_6 = 30$ 이므로

$S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3a_1 = 30$

$a_1 = 10$

$a_6 = 10 + 5d = 0$ 이므로 $d = -2$

따라서 $a_2 = a_1 + d = 10 - 2 = 8$

8. [출제의도] 도함수를 활용하여 부등식이 성립할 조건을 구한다.

$f(x) \le g(x)$ 에서 $g(x) - f(x) \ge 0$

즉 $x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + a \ge 0$

$h(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + a$ 라 하면 $h(x) \ge 0$

$h'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x-1)(x+2)$

$h'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$a-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-\frac{5}{3}$	$\nearrow$

함수 $h(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최솟값 $a - \frac{32}{3}$ 를 갖는다.

$a - \frac{32}{3} \ge 0$ 에서 $a \ge \frac{32}{3}$

따라서 실수 a 의 최솟값은 $\frac{32}{3}$ 이다.

9. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이해한다.

n 이 홀수이면 $n^2 - 16n + 48$ 의 n 제곱근 중

실수인 것의 개수는 항상 1 이므로

$f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 1$

n 이 짝수이면 $n^2 - 16n + 48$ 의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $n^2 - 16n + 48 > 0$ 인 경우

$(n-4)(n-12) > 0$ 에서 $n < 4$ 또는 $n > 12$

이때 $f(n) = 2$ 이므로

$f(2) = 2$

(ii) $n^2 - 16n + 48 = 0$인 경우

$(n-4)(n-12) = 0$에서 $n = 4$ 또는 $n = 12$

이때 $f(n) = 1$ 이므로

$f(4) = 1$

(iii) $n^2 - 16n + 48 < 0$ 인 경우

$(n-4)(n-12) < 0$에서 $4 < n < 12$

이때 $f(n) = 0$ 이므로

$f(6) = f(8) = f(10) = 0$

따라서 $\sum_{n=2}^{10} f(n) = 4 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1 + 3 \times 0 = 7$

10. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제를 해결한다.

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, $\beta(\alpha < \beta)$라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 - tx - 1 = tx + t + 1$,

즉 $x^2 - 2tx - 2 - t = 0$ 의 두 실근이므로

$\alpha = t - \sqrt{t^2 + t + 2}$, $\beta = t + \sqrt{t^2 + t + 2}$

$\beta - \alpha = 2\sqrt{t^2 + t + 2}$ 이고

직선 AB의 기울기가 t 이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{t^2 + t + 2}\sqrt{t^2 + 1}$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2} = \lim_{t \to \infty} \frac{2\sqrt{(t^2 + t + 2)(t^2 + 1)}}{t^2} = 2\lim_{t \to \infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = 2$$

11. [출제의도] 삼각함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times 5 = \frac{15}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = 3$, 이때 $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AB}} + 6 = 9$

함수 $y = f(x)$의 주기가 $2b$ 이므로

$2b = \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BC}} = 12$, $b = 6$

선분 AB의 중점의 x 좌표가 3 이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 이다.

점 A는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$ 에서 $a\sin\frac{\pi}{4} + 1 = 5$, $a = 4\sqrt{2}$

따라서 $a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 + 6^2 = 32 + 36 = 68$

12. [출제의도] 도함수를 활용하여 함수를 추론한다.

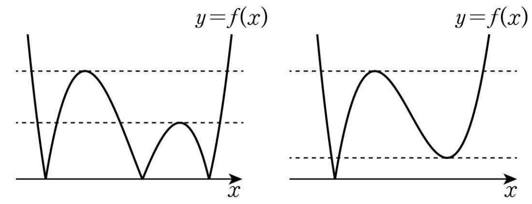
$g(x) = x^3 - 12x + k$ 라 하면 $f(x) = |g(x)|$

$g'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$

$g'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 2$

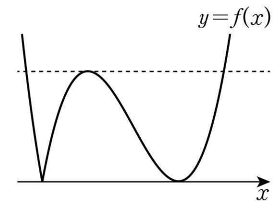
함수 $g(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극댓값 $k + 16$, $x = 2$ 에서 극솟값 $k - 16$ 을 가지므로 k 의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $0 < k < 16$ 또는 $k > 16$ 인 경우



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a 의 값이 3 개 존재하므로 조건을 만족시키지 못한다.

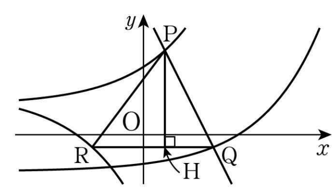
(ii) $k = 16$ 인 경우



함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a 의 값이 오직 하나이다.

(i), (ii)에서 $k = 16$

13. [출제의도] 지수함수를 이용하여 문제를 해결한다.



점 P 에서 직선 QR 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$\overline{\mathrm{HQ}} = t\,(t > 0)$이라 하면 직선 PQ 의 기울기가 -2 이므로 $\overline{\mathrm{PH}} = 2t$ 이고 $\overline{\mathrm{HR}} = 5 - t$ 이다.

직각삼각형 PRH 에서 피타고라스 정리에 의하여

$(5-t)^2 + (2t)^2 = 5^2$, $t(t-2) = 0$, $t = 2$

따라서 $\overline{\mathrm{PH}} = 4$, $\overline{\mathrm{HR}} = 3$

점 R 의 x 좌표를 m 이라 하면 점 P 의 x 좌표는 $m + 3$, 점 Q 의 x 좌표는 $m + 5$ 이므로

$\mathrm{P}(m+3, a^{m+4}+1)$, $\mathrm{Q}\left(m+5, a^{m+2} - \frac{7}{4}\right)$,

$\mathrm{R}\left(m, -a^{m+4} + \frac{3}{2}\right)$

점 P 의 y 좌표는 점 R 의 y 좌표보다 4 만큼 크므로

$a^{m+4} + 1 = \left(-a^{m+4} + \frac{3}{2}\right) + 4$

$a^{m+4} = \frac{9}{4}$ …… ㉠

점 Q 의 y 좌표와 점 R 의 y 좌표가 같으므로

$a^{m+2} - \frac{7}{4} = -a^{m+4} + \frac{3}{2}$

㉠을 대입하여 정리하면 $a^{m+2} = 1$

$a > 1$ 에서 $m + 2 = 0$ 이므로 $m = -2$

㉠에서 $a^2 = \frac{9}{4}$, $a > 1$ 이므로 $a = \frac{3}{2}$

점 $\mathrm{P}\left(1, \frac{13}{4}\right)$이 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로

$\frac{13}{4}=-2\times1+k,\ k=\frac{21}{4}$

따라서 $a+k=\frac{3}{2}+\frac{21}{4}=\frac{27}{4}$

14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수를 추론한다.

$f'(2)=0$이므로 실수 k에 대하여

$f(x)=x^2-4x+k$라 하자.

ㄱ. 만약 $f(2)\ge 0$이면 $x>2$일 때 $f(x)>0$이므로

정적분과 넓이의 관계에 의하여 $\int_2^4 f(x)\,dx>0$,

즉 $\int_4^2 f(x)\,dx=-\int_2^4 f(x)\,dx<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다. 즉 $f(2)<0$ (참)

ㄴ. $\int_4^3 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^3=-k+\frac{5}{3}$

$-k+\frac{5}{3}\ge 0$이므로 $k\le\frac{5}{3}$

$\int_4^2 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^2=-2k+\frac{16}{3}$

$\int_4^3 f(x)\,dx-\int_4^2 f(x)\,dx=k-\frac{11}{3}$

$k\le\frac{5}{3}$에서 $k-\frac{11}{3}\le-2<0$이므로

$\int_4^3 f(x)\,dx<\int_4^2 f(x)\,dx$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $k\le\frac{5}{3}$이므로 $f(3)=k-3\le-\frac{4}{3}<0$

$f(3)=f(1)<0$이므로 구간 $[1, 3]$에서 $f(x)<0$이고, $n=1$ 또는 $n=2$일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $-\int_n^3 f(x)\,dx$와 같다.

즉 $\int_3^n f(x)\,dx=-\int_n^3 f(x)\,dx>0$ …… ㉠

$\int_4^5 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^5=k+\frac{7}{3}$

$k+\frac{7}{3}\ge 0$에서 $k\ge-\frac{7}{3}$이므로

$f(5)=5+k\ge\frac{8}{3}>0$

구간 $[5, \infty)$에서 $f(x)>0$이다.

그러므로 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=5,\ x=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\int_5^n f(x)\,dx$와 같다. 즉 $\int_5^n f(x)\,dx>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\int_4^3 f(x)\,dx\ge 0,\ \int_4^5 f(x)\,dx\ge 0$이면

함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 $-\frac{7}{3}\le k\le\frac{5}{3}$ …… ㉢

$\int_4^6 f(x)\,dx=2k+\frac{32}{3}$이므로 ㉢에서

$6\le\int_4^6 f(x)\,dx\le 14$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

조건 (나)에서 $a_3>a_5$이므로 a_3이 4의 배수인 경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(i) a_3이 4의 배수인 경우

$a_3=4k$ (k는 자연수)라 하면 $a_4=2k+6$

k가 홀수일 때 a_4는 4의 배수이고

$a_5=k+11,\ a_4+a_5=3k+17$이므로

$50<3k+17<60,\ a_3>a_5$에서 $k>\frac{11}{3}$

k는 홀수이므로 $k=13$이고 $a_3=52$

k가 짝수일 때 a_4는 4의 배수가 아니고

$a_5=2k+14,\ a_4+a_5=4k+20$이므로

$50<4k+20<60,\ a_3>a_5$에서 $k>7$

k는 짝수이므로 $k=8$이고 $a_3=32$

따라서 $a_3=52$ 또는 $a_3=32$

$a_3=52$인 경우 $a_2=96$이고

$a_1=94$ 또는 $a_1=188$

$a_3=32$인 경우 $a_2=56$이고

$a_1=54$ 또는 $a_1=108$

(ii) a_3이 4의 배수가 아닌 경우

$a_3=4k-1$ 또는 $a_3=4k-3$ (k는 자연수)일 때

$a_3,\ a_4,\ a_5$는 모두 홀수이고

$a_5=a_4+8=a_3+14>a_3$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a_3=4k-2$ (k는 자연수)일 때

$a_4=4k+4,\ a_5=2k+10$이고

$a_4+a_5=6k+14$이므로 $50<6k+14<60$

$a_3>a_5$에서 $k>6$, 이때 $k=7$이므로 $a_3=26$

따라서 $a_2=22$ 또는 $a_2=44$이다.

$a_2=22$인 경우 $a_1=40$

$a_2=44$인 경우 $a_1=42$ 또는 $a_1=84$

(i), (ii)에서 $M=188,\ m=40$이고 $M+m=228$

16. [출제의도] 로그함수를 활용하여 방정식을 푼다.

로그의 진수의 조건에서 $x-2>0,\ x+6>0$이므로

$x>2$

주어진 방정식에서

$\log_2(x-2)=\log_4 4+\log_4(x+6)$

$\log_4(x-2)^2=\log_4 4(x+6)$

$(x-2)^2=4(x+6)$

$x^2-8x-20=0,\ (x+2)(x-10)=0$

$x>2$이므로 $x=10$

17. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수의 값을 구한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의

접선의 기울기가 4이므로 $f(3)=2,\ f'(3)=4$

$g(x)=(x+2)f(x)$에서

$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$이므로

$g'(3)=f(3)+5f'(3)=2+5\times4=22$

18. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=50$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=30$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$에서

$\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k=-10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=70,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=40$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=110$

19. [출제의도] 정적분을 활용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구한다.

원점에서 출발한 점 P의 시각 $t=k$에서의 위치는

$\int_0^k(12t-12)dt=\left[6t^2-12t\right]_0^k=6k^2-12k$

원점에서 출발한 점 Q의 시각 $t=k$에서의 위치는

$\int_0^k(3t^2+2t-12)dt=\left[t^3+t^2-12t\right]_0^k=k^3+k^2-12k$

시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$6k^2-12k=k^3+k^2-12k,\ k^2(k-5)=0$

$k>0$이므로 $k=5$

시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|12t-12|dt=\int_0^1(12-12t)dt+\int_1^5(12t-12)dt$$
$$=\left[12t-6t^2\right]_0^1+\left[6t^2-12t\right]_1^5=102$$

20. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 활용하여 문제를 해결한다.

$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$에서

$$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)f(x)\,dt+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$$
$$=3f(x)\int_0^x(x-t)\,dt+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$$
$$=3f(x)\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$$
$$=\frac{3}{2}x^2f(x)+3\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$$

$x^2f(x)=6\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$

$x^2f(x)=6x\int_0^x f(t)\,dt-6\int_0^x tf(t)\,dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)dt$ …… ㉡

$f'(2)=4$이므로 다항함수 $f(x)$의 차수는 1 이상이다. 함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하고, 최고차항의 계수를 $a\ (a\ne0)$이라 하자.

㉡의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$a(2+n)=\frac{6a}{n+1}$

$(n+1)(n+2)=6,\ (n-1)(n+4)=0$

n은 자연수이므로 $n=1$

함수 $f(x)$가 일차함수이고 $f'(2)=4$이므로 $a=4$

$f(x)=4x+b$ (단, b는 상수)라 하면 ㉡에서

$2x(4x+b)+4x^2=6\left[2t^2+bt\right]_0^x$

$12x^2+2bx=12x^2+6bx$ …… ㉢

모든 실수 x에 대하여 ㉢이 성립하므로 $b=0$

$f(x)=4x$이므로 $f(6)=24$

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{CAE}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta}=\overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{CE}}=1$

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{FC}}=3$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}$에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{DAE}=90^\circ$이다.

$\angle\mathrm{BAD}=90^\circ-\angle\mathrm{DAC}=\theta$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle\mathrm{ABF})}=\frac{1}{\sin\theta}=4$이므로 $\sin(\angle\mathrm{ABF})=\frac{k}{4}$

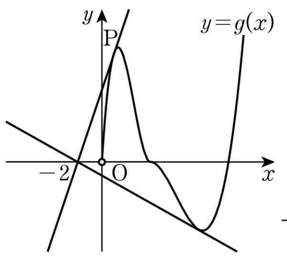
직각삼각형 ABC에서 $\sin(\angle\mathrm{ABC})=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=4\sin(\angle\mathrm{ABC})=4\times\frac{k}{4}=k$

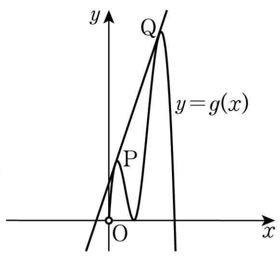
직각삼각형 ABC에서 $\cos(\angle \mathrm{BCA})=\dfrac{k}{4}$ 이므로
삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{FC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{FC}}\times\cos(\angle \mathrm{FCA})$
$k^2=k^2+3^2-2\times k\times 3\times\dfrac{k}{4},\ \dfrac{3}{2}k^2=9$
따라서 $k^2=6$

22. [출제의도] 접선을 활용하여 함수를 추론한다.

$0<x\le 4$에서 $g(x)=x(x-4)^2$이고
함수 $g(x)$가 $x=4$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to4+}g(x)=\lim\limits_{x\to4-}g(x),\ \lim\limits_{x\to4+}f(x)=\lim\limits_{x\to4-}x(x-4)^2$
$f(4)=0$
함수 $g(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로
$\lim\limits_{x\to4+}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4-}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}$
$\lim\limits_{x\to4+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4-}\dfrac{x(x-4)^2}{x-4}$
$f'(4)=0$
$f(4)=f'(4)=0$이고 $g\left(\dfrac{21}{2}\right)=f\left(\dfrac{21}{2}\right)=0$이므로
$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)\ (a\ne0)$이라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

$a>0$이면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다. $a<0$이면 [그림 2]와 같이 조건 (나)를 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 존재한다.
조건 (나)에 의하여 점 $(-2,0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 기울기가 0이 아닌 접선은 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 P, Q에서 곡선 $y=g(x)$에 접한다.
두 점 P, Q의 x좌표를 각각 $t,\ s$라 하고 $0<t<4,\ s>4$라 하자.
$0<t<4$에서 $g'(t)=3t^2-16t+16$이므로
접선의 방정식은
$y=(3t^2-16t+16)(x-t)+t^3-8t^2+16t$
이다. 접선이 점 $(-2,0)$을 지나므로
$(3t^2-16t+16)(-2-t)+t^3-8t^2+16t=0$
$2t^3-2t^2-32t+32=0,\ (t-4)(t+4)(t-1)=0$
$0<t<4$에서 $t=1$이므로 접선의 방정식은
$y=3x+6$이다. 이 접선이 점 Q에서
곡선 $y=f(x)\ (x>4)$에 접한다.
$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$에서
$f'(x)=2a(3x^2-37x+100)=2a(x-4)(3x-25)$
점 Q에서의 접선의 방정식은
$y=2a(s-4)(3s-25)(x-s)+a(s-4)^2(2s-21)$
이 접선이 점 $(-2,0)$을 지나므로
$0=2a(s-4)(3s-25)(-2-s)+a(s-4)^2(2s-21)$
$a\ne0,\ s>4$이므로
$(s-4)(2s-21)=2(s+2)(3s-25)$
$4s^2-9s-184=0,\ (4s+23)(s-8)=0,\ s=8$
$f'(8)=3$이므로 $a=-\dfrac{3}{8}$
$f(x)=-\dfrac{3}{8}(x-4)^2(2x-21)$이므로
$g(10)=f(10)=\dfrac{27}{2}$
따라서 $p=2,\ q=27$이므로 $p+q=29$

[확률과 통계]

23	②	24	④	25	⑤	26	③	27	①
28	①	29	64	30	5				

23. [출제의도] 이항분포를 이해하여 확률을 계산한다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(45,\ p)$를 따르므로
$\mathrm{E}(X)=45p=15$에서 $p=\dfrac{1}{3}$

24. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이해하여 확률을 구한다.

두 사건 $A,\ B$가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$
확률의 덧셈정리에 의하여
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{6}$
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{4}$이므로
$\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$

25. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열할 때, 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
$2\times{}_3\Pi_3=2\times3^3=54$
이때 각 자리의 수의 합이 7보다 큰 자연수는 2222뿐이므로 구하는 자연수의 개수는
$54-1=53$

26. [출제의도] 모평균의 신뢰구간을 이해하여 표본평균과 신뢰구간을 구한다.

양파 64개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\dfrac{16}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{16}{\sqrt{64}}$
$\overline{x}-3.92\le m\le\overline{x}+3.92$
이때 $\overline{x}-3.92=240.12,\ \overline{x}+3.92=a$이므로
$\overline{x}=240.12+3.92=244.04$
$a=244.04+3.92=247.96$
따라서
$\overline{x}+a=244.04+247.96=492$

27. [출제의도] 원순열을 이해하여 의자를 배열하는 경우의 수를 구한다.

서로 이웃한 2개의 의자에 적힌 두 수가 서로소가 되려면 짝수가 적힌 의자끼리는 서로 이웃하면 안 되고 3과 6이 적힌 의자도 서로 이웃하면 안 된다.
홀수가 적힌 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(4-1)!=3!=6$
홀수가 적힌 의자들의 사이사이에 있는 4개의 자리 중 3이 적힌 의자와 이웃하지 않는 자리에 6이 적힌 의자를 배열하고, 남은 3개의 자리에 나머지 3개의 의자를 배열하는 경우의 수는
${}_2\mathrm{C}_1\times3!=2\times6=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times12=72$

28. [출제의도] 정규분포의 성질을 이해하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

$\mathrm{E}(X)=m_1,\ \mathrm{E}(Y)=m_2,\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=\sigma^2$
으로 놓으면 두 확률변수 $X,\ Y$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ \sigma^2),\ \mathrm{N}(m_2,\ \sigma^2)$을 따른다.
함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이고, $f(a)=f(3a)$이므로
$m_1=\dfrac{a+3a}{2}=2a$
함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하고,
$f(a)=f(3a)=g(2a)$이므로
$g(0)=g(2a)$ 또는 $g(2a)=g(4a)$
이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이므로
$m_2=\dfrac{0+2a}{2}=a$ 또는 $m_2=\dfrac{2a+4a}{2}=3a$
$\mathrm{P}(Y\le 2a)=0.6915>0.5$이므로 $m_2<2a$이다.
$a>0$이므로 $m_2=a$
확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때
$\mathrm{P}(Y\le2a)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{2a-a}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{a}{\sigma}\right)$
$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a}{\sigma}\right)=0.6915$
$\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로
$\dfrac{a}{\sigma}=0.5$, 즉 $\sigma=2a$
따라서
$\mathrm{P}(0\le X\le3a)=\mathrm{P}\left(\dfrac{0-2a}{2a}\le Z\le\dfrac{3a-2a}{2a}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$
$=0.3413+0.1915$
$=0.5328$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
${}_8\mathrm{H}_3={}_{8+3-1}\mathrm{C}_3={}_{10}\mathrm{C}_3=120$
이때 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는
$(a-b)(b-c)\ne0$
즉, $a<b<c\le8$ ⋯⋯ ㉠
㉠을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
${}_8\mathrm{C}_3=56$
따라서 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$120-56=64$

30. [출제의도] 조건부확률을 이해하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수인 사건을 A, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 사건을 B라 하자.
주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9이므로 이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 꺼낸 2개의 공의 색깔에 따라 다음과 같이 두 가지이다.

(i) 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 경우
꺼낸 2개의 공이 (①, ❷) 또는 (②, ❶)이어야 하므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{5}$

(ii) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우
꺼낸 2개의 공이 (❶, ❸)이고 이 두 개의 공 중 ❶을 주머니에 다시 넣거나, 꺼낸 2개의 공이 (❷, ❸)이고 이 두 개의 공 중 ❷를 주머니에 다시 넣어야 하므로
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)}$
$=\dfrac{\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}}=\dfrac{2}{3}$
따라서 $p=3,\ q=2$이므로
$p+q=5$

[미적분]

23	④	24	②	25	③	26	⑤	27	①
28	④	29	30	30	91				

23. **[출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=2$$

24. **[출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.**

$x_k=\frac{\pi k}{3n}$라 하면 $\Delta x=\frac{\pi}{3n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{3n}=6\times\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$$

$$=6\times\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=3$$

25. **[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.**

x좌표가 $t\,(1\le t\le 4)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 $S(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{t}}\right)^2=\frac{4}{t}$

따라서 구하는 부피는

$$\int_1^4 S(t)dt=\int_1^4\frac{4}{t}dt=\Big[4\ln t\Big]_1^4=8\ln 2$$

26. **[출제의도] 역함수의 미분법을 이해하여 미분계수를 구한다.**

$f'(x)=2e^{2x}+e^x$에서 $f'(0)=3$

$h(x)=g(5f(x))$라 하면 $f(0)=1$이므로

$h'(0)=g'(5f(0))\times 5f'(0)=15g'(5)$

$g(5)=t$로 놓으면 $f(t)=5$에서

$e^{2t}+e^t-1=5$, $(e^t-2)(e^t+3)=0$

$e^t>0$이므로 $e^t=2$, 즉 $t=\ln 2$

$f'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}+e^{\ln 2}=10$

따라서 $h'(0)=15g'(5)=15\times\frac{1}{f'(\ln 2)}=\frac{3}{2}$

27. **[출제의도] 등비급수를 이해하여 급수의 합을 구한다.**

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$은 첫째항이 $\frac{a}{3}$, 공비가 $\frac{r}{3}$인 등비급수이고 수렴하므로 $-1<\frac{r}{3}<1$, $-3<r<3$ …… ㉠

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$인 등비급수이고 수렴하므로 $-1<\frac{1}{r^2}<1$, $r^2>1$ …… ㉡

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

㉠, ㉡에서 $r=2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{2}{3}}=a=4$$

$a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$이므로

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$$

28. **[출제의도] 적분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.**

$a\ne b$이므로 조건 (가)에서

$a\ne 0$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b\ne 0$

(i) $a\ne 0$, $b=0$일 때,

$\sin x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이고 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\cos x\times e^{a\sin x}\right)dx$$

$$=\int_0^1 te^{at}dt=\left[\frac{t}{a}e^{at}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{a}e^{at}dt$$

$$=\frac{e^a}{a}-\left[\frac{1}{a^2}e^{at}\right]_0^1$$

$$=\frac{(a-1)e^a+1}{a^2}$$

조건 (나)에서 $\frac{(a-1)e^a+1}{a^2}=\frac{1}{a^2}-2e^a$

$a-1=-2a^2$, $(a+1)(2a-1)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(ii) $a=0$, $b\ne 0$일 때,

$\cos x=t$로 놓으면 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이고 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\cos x\times e^{b\cos x}\right)dx$$

$$=-\int_1^0 te^{bt}dt=\int_0^1 te^{bt}dt$$

$$=\left[\frac{t}{b}e^{bt}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{b}e^{bt}dt$$

$$=\frac{e^b}{b}-\left[\frac{1}{b^2}e^{bt}\right]_0^1$$

$$=\frac{(b-1)e^b+1}{b^2}$$

조건 (나)에서 $\frac{(b-1)e^b+1}{b^2}=\frac{1}{b^2}-2e^b$

$b-1=-2b^2$, $(b+1)(2b-1)=0$

$b=-1$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 두 실수 a, b의 순서쌍 (a,b)는

$(-1,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $(0,-1)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

따라서 $a-b$의 최솟값은

$-1-0=-1$

29. **[출제의도] 삼각함수의 극한을 이해하여 도형의 넓이의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.**

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\theta$이므로

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

점 D는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있으므로 $\angle BDA=\frac{\pi}{2}$

$$\overline{CD}=\overline{BC}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}$$

점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 AEH와 ABD는 서로 닮음이고 닮음비는 1 : 2이다.

$$\overline{EH}=\frac{1}{2}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\cos\frac{\theta}{2}$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{EH}=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $60\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=30$

30. **[출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.**

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)e^{-x}$

$\quad=-\{x^2+(a-2)x+b-a\}e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로 $x^2+(a-2)x+b-a=0$ …… ㉠

조건 (가)에서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 두 실근을 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$라 하자.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(a-2)^2-4(b-a)=a^2+4-4b>0$

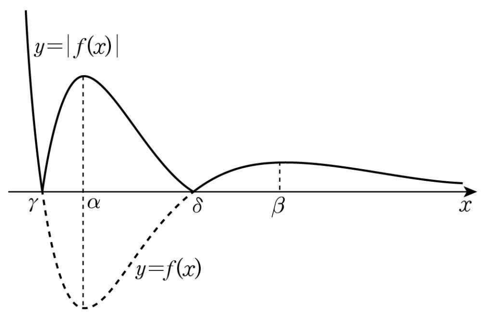
$f(x)=0$에서 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로

$x^2+ax+b=0$ …… ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=a^2-4b$

(i) $D_2>0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표를 γ, $\delta\,(\gamma<\delta)$라 하면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극대이고 $x=\gamma$, $x=\delta$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β와 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근 γ, δ의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

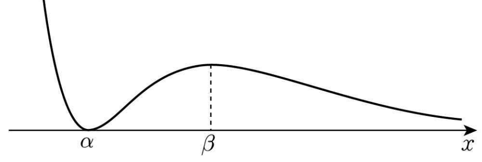
$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=(2-a)+(-a)=3$

$a=-\frac{1}{2}$

이때 a는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $D_2=0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하고, 이 접점의 x좌표는 α이므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

함수 $|f(x)|$는 $x=\beta$에서 극대이고 $x=\alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

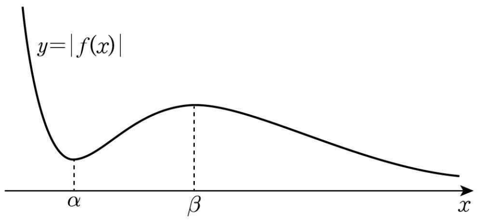
$\alpha+\beta=2-a=3$, $a=-1$

$D_2=(-1)^2-4b=0$, $b=\frac{1}{4}$

이때 b는 정수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $D_2<0$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수 $|f(x)|$는 $x=\beta$에서 극대이고 $x=\alpha$에서 극소이므로 조건 (나)에서 모든 k의 값의 합은 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근 α, β의 합과 같다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2-a=3$, $a=-1$

$D_1=(-1)^2+4-4b>0$, $b<\dfrac{5}{4}$

$D_2=(-1)^2-4b<0$, $b>\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4}<b<\dfrac{5}{4}$이고 b는 정수이므로 $b=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 정수 a, b의 값이 $a=-1$, $b=1$이므로

$f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

따라서 $f(10)=(10^2-10+1)e^{-10}=91e^{-10}$이므로

$p=91$

[기하]

23	①	24	④	25	②	26	③	27	⑤
28	③	29	20	30	15				

23. [출제의도] 좌표공간에서 외분점의 좌표를 계산한다.

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times2-2\times a}{3-2}, \dfrac{3\times(-3)-2\times0}{3-2}, \dfrac{3\times0-2\times1}{3-2}\right)$

즉, $(6-2a, -9, -2)$

yz평면 위의 점은 x좌표가 0이므로 $6-2a=0$

따라서 $a=3$

24. [출제의도] 쌍곡선을 이해하여 쌍곡선의 주축의 길이를 구한다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{27}=1$의 점근선의 기울기는

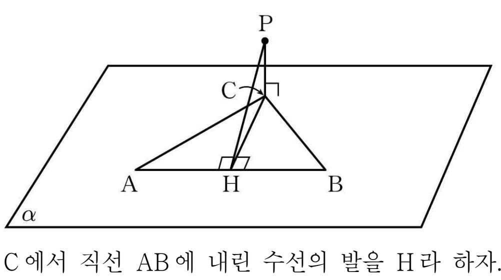
$\pm\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{a^2}}=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{a}$

이 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=3x$이므로

$\dfrac{3\sqrt{3}}{a}=3$에서 $a=\sqrt{3}$

따라서 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=2\sqrt{3}$

25. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하여 점과 직선 사이의 거리를 구한다.



점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$\dfrac{1}{2}\times6\times\overline{\mathrm{CH}}=12$에서 $\overline{\mathrm{CH}}=4$

$\overline{\mathrm{PC}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{CH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

삼각형 PHC는 선분 PH를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PC}}^2+\overline{\mathrm{CH}}^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

따라서 점 P와 직선 AB 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$이다.

26. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}$이고 포물선의 축이 x축이므로 이 포물선의 준선은 y축이다.

포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$이고 초점과 꼭짓점 사이의 거리가 1이므로 포물선의 방정식은

$y^2=4(x-1)$

점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H$'$이라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{BH'}}=\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{OH'}}=\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=1:4$

점 A의 좌표를 $(a, b)(a>0, b>0)$으로 놓으면 점 B의 좌표는 $(4a, 4b)$이다.

두 점 A, B는 포물선 $y^2=4(x-1)$ 위의 점이므로

$b^2=4(a-1)$, $16b^2=4(4a-1)$

$16\times4(a-1)=4(4a-1)$, $12a=15$, $a=\dfrac{5}{4}$

따라서 $\overline{\mathrm{AF}}=a=\dfrac{5}{4}$

27. [출제의도] 평면벡터의 연산의 성질을 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.

선분 BD를 $2:3$으로 내분하는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{5}$

조건 (나)에서

$t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}=5\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

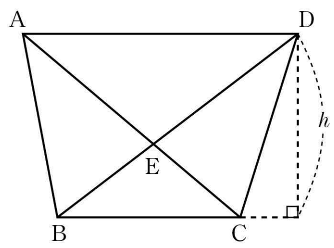
를 만족시키는 실수 t가 존재하므로 점 E는 선분 AC 위의 점이다.

조건 (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$가 서로 평행하고

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{ED}}=2:3$

이므로 두 삼각형 EDA, EBC는 서로 닮음이고 닮음비는 $3:2$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|:|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=3:2$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ …… ㉠



사다리꼴 ABCD의 높이를 h로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 12이므로

$\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\times h=12$, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\times h=24$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 사다리꼴 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|)\times h$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|+\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\right)\times h$

$=\dfrac{5}{6}\times|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\times h=\dfrac{5}{6}\times24$

$=20$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 타원의 초점의 좌표를 구한다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{18}=1$의 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$이므로 $a^2-18=c^2$, $a^2=c^2+18$ …… ㉠

삼각형 RF$'$F가 한 변의 길이가 $2c$인 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{3}c$

점 F$'$이 선분 QF의 중점이므로 $\overline{\mathrm{QO}}=3c$

직선 QR의 기울기가 $\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\overline{\mathrm{QO}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 타원 위의 점 P에서의 접선 QR의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2a^2+18}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2+18}$

직선 QR의 y절편이 $\sqrt{3}c$이므로

$\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2+18}=\sqrt{3}c$, $\dfrac{1}{3}a^2+18=3c^2$

㉠에 의하여 $\dfrac{1}{3}(c^2+18)+18=3c^2$, $\dfrac{8}{3}c^2=24$

따라서 $c^2=9$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 이해하여 벡터의 내적을 구하는 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$에서 $\overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$에서 $\overline{\mathrm{OQ}}\perp\overline{\mathrm{AQ}}$

직각삼각형 OAP에서 $\overline{\mathrm{OA}}=5$, $\overline{\mathrm{OP}}=2$이므로

$\cos(\angle\mathrm{AOP})=\dfrac{2}{5}$

직각삼각형 OAQ에서 $\overline{\mathrm{OA}}=5$, $\overline{\mathrm{AQ}}=1$이므로

$\cos(\angle\mathrm{QAO})=\dfrac{1}{5}$

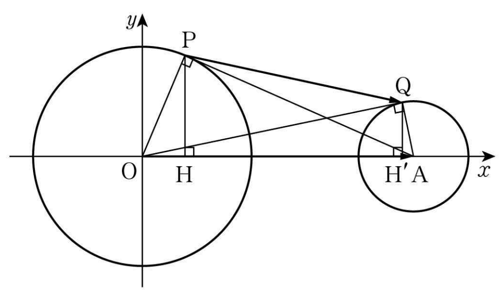
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, H$'$이라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OP}}\times\cos(\angle\mathrm{AOP})=2\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\overline{\mathrm{H'A}}=\overline{\mathrm{QA}}\times\cos(\angle\mathrm{QAO})=1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$

이므로 $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OH'}}-\overline{\mathrm{OH}}=\left(5-\dfrac{1}{5}\right)-\dfrac{4}{5}=4$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{HH'}}=5\times4=20$



30. [출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

구 S의 중심을 $\mathrm{E}(0, 0, \sqrt{5})$라 하면 점 E에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원점 O이다.

점 O는 원 C의 중심이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EB}}^2-\overline{\mathrm{OE}}^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$

따라서 원 C의 반지름의 길이는 2이다.

삼각형 BCD의 외접원을 C'이라 하고, 구의 중심 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 H는 원 C'의 중심이다.

조건 (나)에 의하여 $\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{OB}}=2$

직각삼각형 EBH에서

$\overline{\mathrm{HB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{EB}}^2-\overline{\mathrm{EH}}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

이므로 원 C'의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{HM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고

$\overline{\mathrm{HB}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\cos(\angle\mathrm{HBM})=\dfrac{\overline{\mathrm{BM}}}{\overline{\mathrm{HB}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\angle\mathrm{HBM}=30°$

조건 (다)에 의하여 $\angle\mathrm{CBD}=2\times\angle\mathrm{HBM}=60°$

조건 (나)에서 직선 AB가 평면 BCD에 수직이므로 평면 ABC와 평면 ABD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta=\angle\mathrm{CBD}=60°$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{15}=2\sqrt{15}$

삼각형 ABC의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는

$2\sqrt{15}\times\cos60°=\sqrt{15}$

따라서 $k^2=15$