[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 1]

1. 일반정보

유형	☐ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	일반전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하, 수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	공간에서의 두 점 사이의 거리, 공간좌표, 삼각형의 넓이, 삼각함수의 극한
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

xyz좌표공간에서 $x^2+y^2=4$, $z=6$을 만족시키는 점 (x,y,z)들의 집합을 A라 하자. 집합 A의 임의의 점을 $P(x,y,z)$라고 하자.

(1) 점 $Q(2,4,2)$와 집합 A의 임의의 점 $P(x,y,z)$를 지나는 직선은 xy평면과 한 교점에서 만난다. 이렇게 구해지는 교점들의 집합을 방정식으로 나타내시오. (1점)

(2) $z=2$ 평면에 변의 개수가 n인 정다각형이 있고, 그 내부에 점 $R(2,2,2)$가 있다. 이 정다각형의 한 꼭지점의 좌표는 $(2,4,2)$이고, 각 꼭지점과 점 $R(2,2,2)$ 사이의 거리가 2라고 하자. 이 정다각형의 변 또는 내부에 있는 임의의 점과 집합 A의 임의의 점 $P(x,y,z)$를 지나는 직선은 xy평면과 한 교점에서 만난다. 그 교점들을 모아놓은 도형의 넓이를 S_n이라고 할 때, S_n을 구하시오. (3점)

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구하시오. (1점)

3. 출제 의도

- 좌표공간을 통해 도형을 대수적으로 표현할 수 있는지 확인하며 삼각함수의 극한을 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정		예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
(1)	교육과정	[기하]-(3) 공간도형과 공간좌표-(나) 공간좌표
	성취기준·성취수준	[12기하03-04] 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다. [12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
(2)	교육과정	[수학 I]-(2) 삼각함수-(가) 삼각함수 [기하]-(3) 공간도형과 공간좌표-(나) 공간좌표
	성취기준·성취수준	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12기하03-04] 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다. [12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
(3)	교육과정	[미적분]-(2) 미분법-(가) 여러 가지 함수의 미분 [미적분]-(1) 수열의 극한-(가) 수열의 극한
	성취기준·성취수준	[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	권오남 외	교학사	2017	103-104
	미적분	김원경 외	비상	2018	65-66 16-18
	기하	김원경 외	비상	2018	128-132
기타					

5. 문항 해설

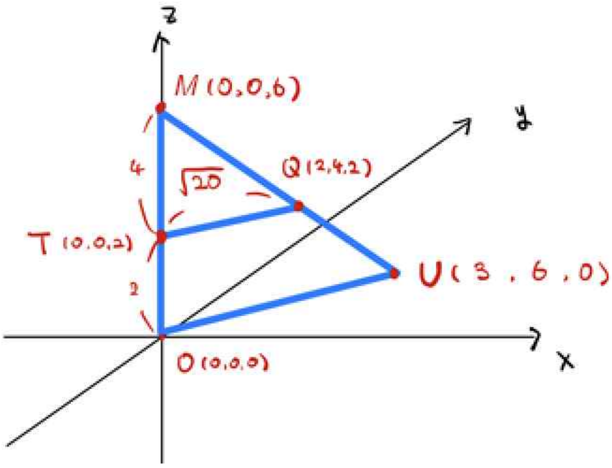
(1)번은 공간좌표와 삼각형의 닮음, 공간에서의 두 점 사이의 거리를 이용하여 두 점을 지나는 직선과 평면이 만나는 점의 자취를 구하는 간단한 문항이다.
(2)번은 (1)번의 결과와 삼각형의 닮음, 공간에서의 두 점 사이의 거리, 삼각형의 넓이 공식 등을 이용하여 직선과 평면이 만나는 점들이 이루는 부분의 넓이를 구하는 문항이다.
(3)번은 (2)번에서 구한 식과 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	답을 구하면 1점	1점
(2)	S_n 식을 구하면 3점 (만약, S_n의 식은 틀렸지만 옳은 도형을 설명하면 1점.)	3점
(3)	$\lim_{n\to\infty} S_n$을 구하면 1점. (2번의 S_n 식을 이용하거나 반지름이 4인 원의 넓이로 이해해서 답을 구하면 1점)	1점

7. 예시 답안

(1) $x^2+y^2=4$, $z=6$을 만족시키는 원의 중심은 $M(0,0,6)$이다. 또한, $O(0,0,0)$, $T(0,0,2)$, $Q(2,4,2)$라고 하고 직선 MQ와 xy평면이 만나는 점을 U라고 하자. 그러면 다음 그림에서와 같이 두 삼각형 MTQ, MOU는 AA닮음이다.
($\angle M$는 공통, $\angle MTQ = 90^\circ = \angle MOU$)



$\overline{TQ} = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$이고 $4:6 = \overline{MT}:\overline{MO} = \overline{TQ}:\overline{OU}$이므로 $\overline{OU} = 3\sqrt{5}$임을 알 수 있다. 직선 MQ을 xy평면으로 정사영하여 만들어지는 직선의 방정식은 $4x=2y$이므로 점 U의 좌표는 $(3, 6, 0)$이다.

$P(x,y,z)$와 $Q(2,4,2)$를 잇는 직선이 xy평면과 만나는 점을 P'이라고 하자.

그러면 다음 그림에서와 같이 두 삼각형 QMP, QUP'는 AA닮음이다.

따라서 $\overline{MP}$를 밑변으로 하는 삼각형 QMP의 높이는 4이고, $\overline{UP'}$를 밑변으로 하는 삼각형 QUP'의 높이는 2이므로 $4:2 = \overline{P(x,y,z)M} : \overline{UP'}$이다.

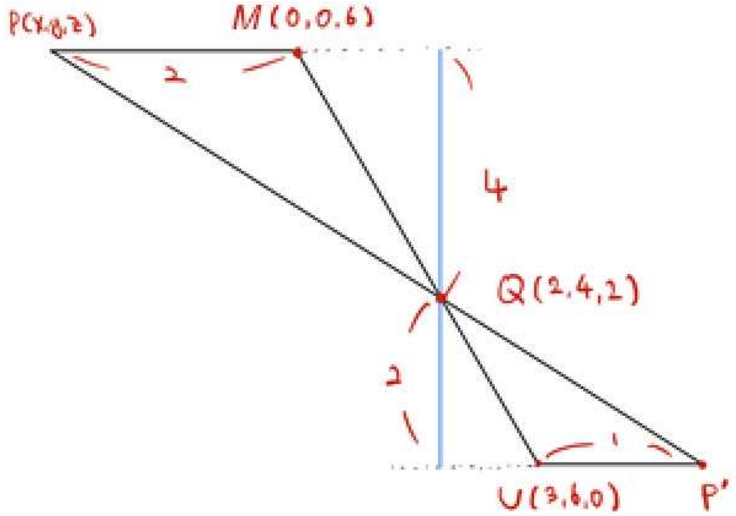
따라서 $\overline{P(x,y,z)M} = 2$, $\overline{UP'} = 1$이다. 즉, 점 $P(x,y,z)$가 원 위에서 움직일 때, 점 P'는 점 $U(3,6,0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 xy평면 위의 원이므로 $(x-3)^2+(y-6)^2=1$ (xy평면)이다.

정답: $(x-3)^2+(y-6)^2=1$ (xy평면)

(2) 평면 $z=2$ 위의 정n각형 A_n이 있다. 정n각형 A_n의 한 꼭짓점의 좌표는 $(2,4,2)$이며 각 꼭짓점과 점 $R(2,2,2)$ 사이의 거리가 2이다. 정n각형 A_n위의 임의의 점과 점 $M(0,0,6)$을 지나는 직선이 xy평면과 만나는 점들로 이루어진 곡선을 B_n이라고 하자.

두 점 $M(0,0,6)$, $R(2,2,2)$를 잇는 직선이 xy평면과 만나는 점은 $C(3,3,0)$이다.

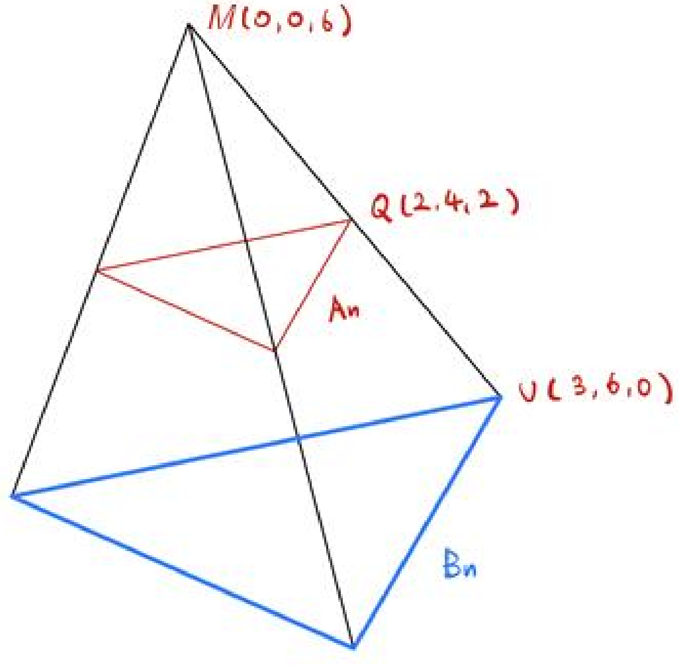
또한, 정n각형 A_n의 임의의 꼭짓점 D_i에 대하여 점 D와 점 $M(0,0,6)$을 지나는 직선이 xy평면과 만나는 점을 E_i라 하면, 두 삼각형 MRD_i, MCE_i는 서로 닮음이고



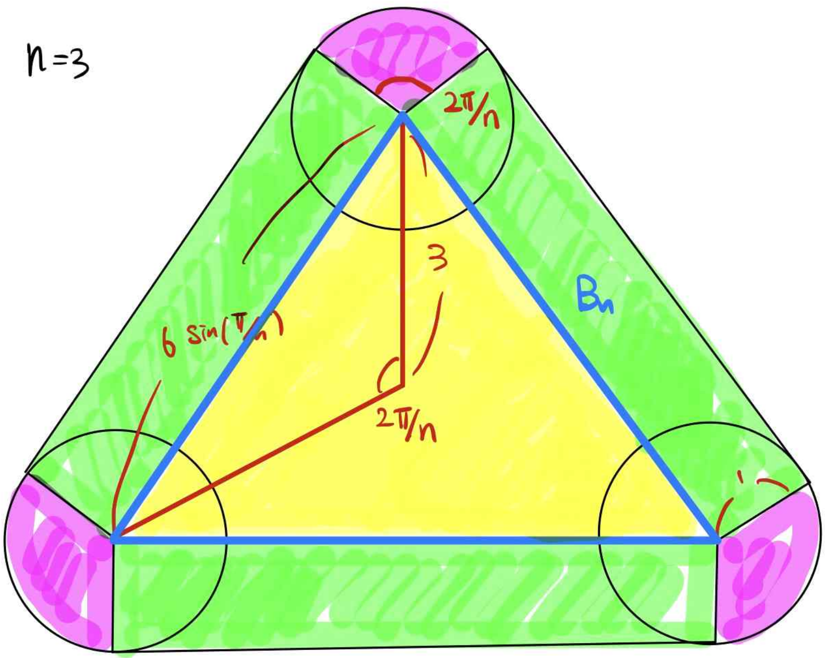
$\overline{MR} = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{6}$, $\overline{MC} = \sqrt{3^2+3^2+6^2} = 3\sqrt{6}$이므로, 닮음비가 $2:3$이다.

따라서 $\overline{RD_i} : \overline{CE_i} = 2:3$이고 $\overline{RD_i} = 2$이므로 $\overline{CE_i} = 3$이다.

즉, 곡선 B_n의 각 꼭짓점은 점 $C(3,3,0)$과의 거리가 3인 정n각형임을 알 수 있다.



(1)에서와 같은 방법으로 정n각형 A_n의 변 또는 내부의 점과 점 $P(x,y,z)$를 잇는 직선이 xy평면에서 만나는 교점들을 모아놓은 도형은 다음 그림과 같이 표시된다는 사실을 알 수 있다.



이 도형의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

S_n = 반지름의 길이가 1인 원의 넓이(보라색 부분의 합)

+ B_n의 둘레(녹색부분의 합) + B_n의 넓이(노란색 부분)

즉, $S_n = \pi + 6n\sin(\pi/n) + (9n/2)\sin(2\pi/n)$.

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$을 이용하여 다음 극한을 계산할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi + \lim_{n\to\infty} 6n\sin(\pi/n) + \lim_{n\to\infty}(9n/2)\sin(2\pi/n)$$

$$= \pi + 6\pi + 9\pi$$

$$= 16\pi$$

※ (2)의 결과를 이용하지 않은 풀이: 구하는 도형이 반지름이 4인 원이라는 것을 (1)을 통해 알아내서 직접 넓이 16π를 구한다.

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

주어진 기하학적 상황을 공간에서의 두 점 사이의 거리 공식, 삼각형의 넓이 공식, 삼각함수의 극한 등을 이용하여 해결해야 하는 융합적인 문제로써 학생들이 고교교육과정에서 학습한 다양한 개념 및 성질을 깊이 있게 학습하였는지, 기하학적 상황과 대수적 결과 사이의 관련성을 파악할 수 있는지를 평가할 수 있다는 점에서 매우 좋은 문항이다. (1)번은 두 점 사이의 거리 공식, 공간 좌표, 닮음 삼각형의 성질을 이용하여 점의 자취를 구하는 문항이고, (2)번은 (1)번에서 구한 결과와 닮음 삼각형의 성질, 두 점 사이의 거리 공식, 삼각형의 넓이 공식 등을 이용하여 점의 자취의 넓이를 구하는 문항으로써 기하학적 상황과 대수식 사이의 관계를 파악해야 하며, (1)번에서 발견한 수학적 사실을 활용해야 한다는 점에서 학생들의 수학적 사고능력을 평가하는데 매우 적절한 문항이라 사료된다. (3)번은 (2)번에서 구한 결과와 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 도출해야 한다는 점에서 기하학적 상황에서 대수식을 도출하고, 대수식에 대한 극한으로 이어진다는 점에서 학생들의 융합적 사고를 평가하기에 좋은 문항이라 사료된다. [수학 I]에서 삼각형의 넓이 공식, [미적분]에서 삼각함수의 극한의 성질, 수열의 극한에 대한 성질, [기하]에서 공간좌표, 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 공식 등 고교교육과정을 성실하게 학습한 학생들은 쉽게 접근하여 해결할 수 있었으리라 사료된다.

[고등학교 수학교사 B]

3차원 공간에서 평면 위의 한 도형 위의 점과 다른 평면 위의 한 도형 위의 점을 이은 직선에 대하여, 직선과 xy평면과의 교점이 그리는 도형의 특징을 이해하고 주어진 문제 상황을 해결할 수 있는지 평가하기에 좋은 문항이다. 기하학적 상황을 대수적으로 표현하여 문제를 해결하는 능력을 확인할 수 있으며, 삼각형의 넓이, 공간좌표, 삼각함수의 극한, 수열의 극한에 대한 개념을 활용할 수 있는지 묻는 문항이다. (1)번은 평면 $z=6$위의 원 위의 점과 점 $\mathrm{Q}(2,4,2)$를 이은 직선이 xy평면과 만난 교점들이 원을 그린다는 것을 파악하고, 외분점과 삼각형의 닮음의 성질 등을 이용하여 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 쉽게 구할 수 있는 문항이다. (2)번은 (1)번에서 한 단계 더 발전하여 $z=6$위의 원 위의 점과 $z=2$위의 정다각형의 변 또는 내부의 점을 연결한 직선이 xy평면과 만난 교점이 그리는 도형의 특징을 파악하고 삼각형의 넓이 공식과 규칙성을 이용하여 넓이를 구하는 문항이다. 이는 (1)번에서 구한 사실을 확장하여 적용할 수 있는 묻는 좋은 문항이다. (3)번은 삼각함수의 극한을 이용하여 (2)에서 구한 S_n에 대한 수열의 극한을 구할 수 있는지 묻는 문항이다. 본 문항은 좌표공간에서 삼각형의 닮음, 대칭성 등을 이용하여 도형을 대수적으로 표현하고, 공간지각능력과 수학적 사고력을 평가하기에 좋은 문항이다. (2)번 문항에서 정n각형을 일반화하여 표현하는 과정에서 학생들이 어려움을 느낄 수 있으나 [기하] 교과에서 공간도형과 공간좌표 단원을 성실하게 학습한 학생이라면 잘 해결했으리라 생각된다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2023학년도 수능 기하 23번**
근거	• 3차원에서 두 점 사이의 거리를 이용한 문제 해결 과정

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2022학년도 10월 고3 전국연합학력평가 26번**
근거	• 3차원 공간에서 두 삼각형의 닮음을 이용하는 문제 해결 과정

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2022학년도 6월 고2 전국연합학력평가 16번**
근거	• 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제 해결 과정

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2023학년도 수능 미적분 28번**
근거	• $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$을 이용하여 주어진 극한값을 구하는 문제 해결 과정

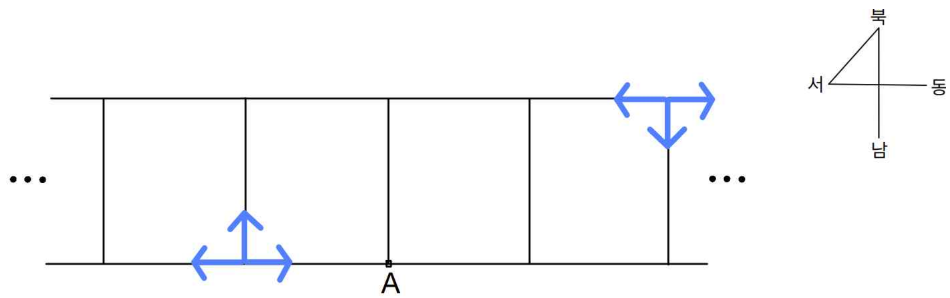
[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 2]

1. 일반정보

유형	☐ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	일반전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계,
	핵심개념 및 용어	경우의 수, 조건부 확률, 수열의 극한의 대소 관계
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

다음 그림과 같이 정사각형 타일들이 일렬로 (무한히) 배열되어 있다. 각 타일의 꼭지점을 ‘교차점’이라 하자. 개미는 교차점 A에서 출발하여 타일의 변 위를 다음 규칙을 따라 움직인다.



<규칙> 각 교차점에 도달할 때마다 개미는 그 교차점에 연결된 세 변의 방향 중 하나를 똑같은 확률로 임의로 골라 다음 교차점으로 이동한다.
(예시: 그림의 파란색 화살표 방향들이 해당 교차점에서 개미가 이동할 수 있는 방향이다.)

이 규칙을 따르면, 개미가 n회의 움직임을 시행할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 3^n이다.

(1) 개미가 총 $2n$회의 움직임을 시행한다고 가정하자. 개미가 m회 $(0 \le m \le n)$의 서쪽 방향 움직임을 시행하면서, $2n$번째 도달하는 교차점이 출발점 A와 일치하는 경우의 수는 몇 가지인가? (2점)

(2) 개미가 $2n$번째 도달하는 교차점이 출발점 A와 일치하였을 때, 서쪽 방향 움직임을 m회 $(0 \le m \le n)$ 시행했을 조건부 확률을 $p_{n,m}$이라 하자. 주어진 자연수 n에 대해, 이 조건부 확률 $p_{n,m}$을 최대화하는 m의 값을 $f(n)$이라 하자 (만약 최대화하는 m이 여러 개 존재한다면, 이들 중 가장 작은 값을 택한다). 이 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$의 값을 구하시오. (3점)

3. 출제 의도

- 곱의 법칙과 조합 개념을 이해하여 경우의 수를 정확히 구할 수 있는지 확인.
  조건부 확률의 개념을 제대로 이해하는지 확인.
  조합의 수의 정의를 제대로 활용할 수 있는지 확인.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

<table>
<tr><td colspan="2">적용 교육과정</td><td>예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”</td></tr>
<tr><td colspan="2">문항 및 제시문</td><td>학습내용 성취 기준</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td>교육과정</td><td>[수학]-(6) 경우의 수-(가) 경우의 수</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>교육과정</td><td>[확률과 통계]-(2) 확률-(나) 조건부 확률
[수학]-(6) 경우의 수-(가) 경우의 수
[미적분]-(1) 수열의 극한-(가) 수열의 극한</td></tr>
<tr><td>성취기준·
성취수준</td><td>[12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.
[10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다.
[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.</td></tr>
</table>

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	김원경 외	비상	2018	19
	수학	김원경 외	비상	2017	245-246 251-254
	확률과 통계	김원경 외	비상	2018	53-54
기타					

5. 문항 해설

(1)번은 조합의 수, 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하는 간단한 문항이다.
(2)번은 (1)번에서 구한 식과 조합의 수의 정의, 조건부 확률 정의 등을 이용하여 주어진 값의 범위를 구한 뒤 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	(1점) 서쪽 움직임을 m회 실시하면서 $2n$번째 교차점이 출발점과 일치하려면, 동쪽 움직임 횟수도 m회라는 사실을 도출. (일반적으로, 북, 남, 동, 서쪽으로 각각 $n-m, n-m, m, m$회 이동해야 한다.) (1점) 경우의 수를 이항계수를 이용하여 정확히 도출.	2점
(2)	(1점) 조건부 확률 $p_{n,m}$을 도출. (1점) 이웃한 두 경우의 수를 비교하는 아이디어를 언급. (1점) m이 커짐에 따라 조건부 확률이 증가하다가 감소한다는 사실을 이항계수의 정의를 이용하여 관찰하고, 증감성이 변하는 지점이 $\frac{2n}{3}$ 근방이라는 사실을 도출. (※ 채점 시 주의사항) – $f(n)$의 범위가 위 풀이와 정확히 일치하지 않아도, 적절한 상수 $c_1, c_2 \geq 0$에 대해 $\frac{2n-c_1}{3} \leq f(n) \leq \frac{2n+c_2}{3}$ 를 도출하여도 정답 인정. – 위 풀이처럼 m의 범위에 대한 경우를 나누지 않고, $(m+1)^2$와 $(2n-2m)(2n-2m-1)$의 대소관계를 m에 대한 이차식으로 간주하여 다른 방법으로 해결한 경우 (예시: 근의 공식 이용)도 정답 인정. (특수 상황, 1점) 각 교차점에서 서쪽 움직임의 확률이 $\frac{1}{3}$이라서 $f(n)$의 값이 대략 $2n \times \frac{1}{3} = \frac{2n}{3}$ 이라고 언급하면 총점 3점 중 1점.	3점

7. 예시 답안

1. $2n$번째 도달하는 교차점이 출발점과 일치한다면, 서쪽과 동쪽으로 움직인 횟수가 서로 같다. 즉, 서쪽으로 움직인 횟수가 m회라면, 동쪽으로 움직인 횟수도 역시 m회이다. $2n$회의 움직임 시기 중 동쪽과 서쪽 움직임 시기를 각각 m개 고르는 경우의 수는 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$ 이다. 또한, 동쪽과 서쪽 움직임의 시기가 정해진다면, 나머지 $2n-2m$회의 움직임은 수직 방향(북쪽 또는 남쪽)이고 자동으로 정해진다. 즉, 총 경우의 수는 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$ 이다.

2. 조건부 확률 $p_{n,m}$은 경우의 수 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$에 비례한다.

($p_{n,m} = \dfrac{{}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m}{\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}C_k \cdot {}_{2n-k}C_k}$ 이다.)

즉, $f(n)$은 경우의 수 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$를 최대로 만드는 m의 값이다.

이웃한 두 항의 대소관계를 알아보자.

$${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m \quad \text{vs} \quad {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}.$$

이항계수 공식에 의해

$${}_{2n}C_m = \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-m+1)}{m!} = \frac{(2n)!}{m!\,(2n-m)!}$$ 이고

$${}_{2n-m}C_m = \frac{(2n-m)\cdots(2n-2m+1)}{m!} = \frac{(2n-m)!}{m!\,(2n-2m)!}$$ 이므로,

$${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m = \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-2m+1)}{(m!)^2} = \frac{(2n)!}{m!\,m!\,(2n-2m)!}$$ 이다.

이를 이용하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1} &= \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-2m-1)}{((m+1)!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(m+1)!\,(m+1)!\,(2n-2m-2)!} \\ &= ({}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m) \cdot \frac{(2n-2m)(2n-2m-1)}{(m+1)^2} \end{aligned}$$

따라서, 다음 등식을 얻는다.

$$\frac{{}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}}{{}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m} = \frac{(2n-2m-1)(2n-2m)}{(m+1)^2}$$

이 때, $(m+1)^2 < (2n-2m-1)(2n-2m)$이면

${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m < {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-m-1}C_{m+1}$ 이고

$(m+1)^2 > (2n-2m-1)(2n-2m)$이면

${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m > {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-m-1}C_{m+1}$ 이다.

● $m+1 \le 2n-2m-1 \Rightarrow m \le \dfrac{2n-2}{3}$인 경우:

$(m+1)^2 \le (2n-2m-1)^2 < (2n-2m)(2n-2m-1)$ 이므로,

${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m < {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}$이다.

● $m+1 \ge 2n-2m \Rightarrow m \ge \dfrac{2n-1}{3}$인 경우:

$(m+1)^2 \ge (2n-2m)^2 > (2n-2m)(2n-2m-1)$ 이므로,

${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m > {}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}$이다.

따라서, 구하는 m의 최대값 $f(n)$은 다음 부등식을 만족시킨다.

$\dfrac{2n-2}{3} < f(n) < \dfrac{2n-1}{3}+1$이 되어, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n} = \dfrac{2}{3}$ 이다.

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

3가지 방향으로 움직일 수 있는 상황에서 특정한 사건의 경우의 수, 조건부 확률 등에 대해 묻는 융합형 문제로써 경우의 수와 조건부 확률을 올바르게 구하고, 조합의 수의 정의 및 성질을 문제 상황에 적절하게 적용할 수 있는지를 평가할 수 있는 매우 좋은 문항이다. (1)번은 조합의 수를 이용하여 주어진 사건의 경우의 수를 구하는 문항이고, (2)번은 (1)번에서 구한 식과 조합의 수의 정의 및 성질 등을 이용하여 조건부 확률이 최대가 되도록 하는 서쪽 방향 움직임의 횟수의 범위를 구하고, 그 범위와 샌드위치 정리를 이용하여 주어진 극한값을 구하는 문항으로써 다양한 개념과 연관되어 있으며 확률적 사고, 대수적 사고 등을 모두 활용해야 한다는 점에서 학생들의 융합적 사고능력을 평가하기에 좋은 문항이라 사료된다. [수학]에서 경우의 수 및 조합의 수, [확률과 통계]에서 조건부 확률, [미적분]에서 수열의 극한에 대한 기본 성질 등 교육과정을 성실히 학습한 학생들은 쉽게 접근하여 해결할 수 있었으리라 사료된다.

[고등학교 수학교사 B]

3가지 방향으로 움직이는 점에 대하여 점의 도달점이 출발점과 같아지는 경우의 수를 조합의 수로 나타낼 수 있는지, 이항계수의 정의에 의해 변수 m에 대하여 m의 값이 커짐에 따라 ${}_{2n}C_m$의 값은 증가하다가 감소한다는 사실에 대해 깊게 학습하였는지 묻는 문항이다. 조합, 이항계수의 정의, 조건부 확률 등의 전반적인 개념을 융합하여 이를 문제 상황에 적용하고 수학적으로 사고할 수 있는 능력을 확인할 수 있는 좋은 문항이다. (1)번은 개미가 이동할 수 있는 방향이 총 3가지인 무한히 이어진 타일의 교차점에서 $2n$회의 움직임을 시행할 때 출발점과 일치하는 경우를 판단하고 이를 같은 것이 있는 순열이나 조합의 수로 표현할 수 있는지 묻는 문항이다. 이러한 유형은 교과서나 모의고사에서 빈번히 출제된 형태이므로 어렵지 않게 접근하여 해결했을 것이라 판단된다. (2)번은 (1)과 같은 상황의 조건부확률을 구하여 결국은 ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m$을 최대로 만드는 m의 값(=$f(n)$)을 찾는 문제로 해석할 수 있는지 묻는 문항이다. $\dfrac{{}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m}{{}_{2n}C_{m+1} \cdot {}_{2n-(m+1)}C_{m+1}}$이 1보다 큰 경우와 1보다 작은 경우의 m의 범위를 구하여 $f(n)$의 범위를 찾는 것이 관건이다. $f(n)$의 범위를 파악하는 과정에서 다소 어려움을 느낄 수 있으나 $f(n)$의 의미를 이해한다면 $\lim_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{n} = \dfrac{2}{3}$가 된다는 것은 쉽게 파악할 수 있을 것이다. 본 문항은 조합의 수의 성질에 대해 심도있게 학습하고 이를 활용할 수 있는 역량이 있는 학생이라면 잘 해결했으리라 생각된다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2020학년도 3월 고2 전국연합학력평가 15번**
근거	• 조합의 수를 이용하여 주어진 사건의 경우의 수를 구하는 문제 해결 과정

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2023학년도 수능 확률과 통계 29번 문제**
근거	• 주어진 상황에서 조건부 확률을 구하는 문제 해결 과정

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2015개정 비상 [수학] 교과서 (김원경 외) 253p 예제 1번**
근거	• 조합의 수의 정의를 이용하여 두 수의 크기를 비교하는 문제 해결 과정

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2015개정 비상 [미적분] 교과서 (김원경 외) 19p 예제 3번**
근거	• 수열 $\{a_n\}$의 값의 범위가 주어졌을 때, 수열의 극한의 대소 관계(샌드위치 정리)를 이용하여 극한값을 구하는 문제 해결 과정

[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 3]

1. 일반정보

유형	☐ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	학교장추천전형, 고른기회전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학 I
	핵심개념 및 용어	이차방정식의 판별식, 이차방정식의 근과 계수의 관계, 수열의 귀납적 정의, 수학적 귀납법
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

실수 순서쌍 (a_0, b_0)을 생각하자. 방정식 $x^2+a_0x+b_0=0$의 실수해가 존재하지 않으면 순서쌍 (a_0, b_0)의 친화도를 0으로 정의하고, 방정식 $x^2+a_0x+b_0=0$이 두 실수해 a_1, $b_1(a_1 \geq b_1)$을 가지면(중근은 두 개로 센다) 새로운 방정식 $x^2+a_1x+b_1=0$을 만들어 이 방정식의 실수해가 없으면 순서쌍 (a_0, b_0)의 친화도를 1로 정의하고, 실수해가 존재하면 두 실수해를 a_2, $b_2(a_2 \geq b_2)$로 두자. 이런 과정을 반복해서 방정식 $x^2+a_kx+b_k=0$가 실수해를 갖지 않는 최소의 k를 순서쌍 (a_0, b_0)의 친화도로 정의하자. 만약 이런 과정이 끝나지 않고 계속 반복된다면 순서쌍 (a_0, b_0)의 친화도는 정의되지 않는다고 하자.

(1) 순서쌍 $(-6,9)$의 친화도는 정의되는가? 정의된다면 친화도는 얼마인가? (1점)
(2) 순서쌍 $(-3,2)$의 친화도는 정의되는가? 정의된다면 친화도는 얼마인가? (2점)
(3) 친화도가 정의되는 순서쌍 중 친화도의 최댓값은 얼마인가? (2점)

3. 출제 의도

- 기본적인 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하고 있으며 이차방정식을 풀 수 있는지 확인하고, 귀납적으로 정의되는 수열을 이해할 수 있는 능력을 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정		예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
(1)	교육과정	수학 – (1) 문자와 식 4. 복소수와 이차방정식
	성취기준·성취수준	[10수학01-06] 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 안다.
(2)	교육과정	수학 – (1) 문자와 식 4. 복소수와 이차방정식 수학 Ⅰ – (3) 수열 3. 수학적 귀납법
	성취기준·성취수준	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다. [12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.
(3)	교육과정	수학 – (1) 문자와 식 4. 복소수와 이차방정식 수학 Ⅰ – (3) 수열 3. 수학적 귀납법
	성취기준·성취수준	[10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외	미래엔	2018.3.	58~65
	수학 Ⅰ	황선욱 외	미래엔	2018.3.	155~162
기타					

5. 문항 해설

(1)번은 이차방정식의 실수해를 구하고, 또 다른 이차방정식의 실수해가 존재하지 않음을 확인하여 친화도를 구하는 간단한 문항이다.

(2)번은 이차방정식의 판별식과 근과 계수와의 관계를 이용해 방정식 $x^2+a_kx+b_k=0$ $(k\geq 0)$이 항상 실수해를 가질 수 밖에 없다는 것을 확인하여 친화도가 정의되지 않음을 구하는 문항이다.

(3)번은 (2)에서 b_k가 음수일 때 친화도가 정의되지 않는다는 것을 확인한 후, (a_0, b_0)의 친화도가 정의된다고 가정했을 때 방정식 $x^2+a_0x+b_0=0$의 양의 실수해 a_1, b_1에 대하여 방정식 $x^2+a_1x+b_1=0$의 실수해가 존재한다면 모두 음의 실수해가 될 수 밖에 없음을 확인한다. 이를 이용하여 친화도가 정의되는 순서쌍 중 친화도의 최댓값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$x^2-6x+9=0$의 해를 구하고, $x^2+3x+3=0$의 해가 없음을 구해서 $(-6,9)$의 친화도가 1임을 확인한다. (1점)	1점
(2)	$(a_0,b_0)=(-3,2)$인 경우, $(a_{1,}b_1)=(2,1)$이고, $(a_2,b_2)=(-1,-1)$라는 것을 확인한다. (1점) b_k가 음수가 될 경우, 앞의 과정이 끝나지 않고 계속 반복되어 친화도가 정의되지 않음을 설명한다. (1점)	2점
(3)	$x^2+a_0x+b_0=0$가 음수해를 가질 경우, (a_0,b_0)의 친화도가 정의되지 않음에 착안해 이 방정식이 양수해만 가질 경우를 고려한다. 그 경우, $x^2+a_0x+b_0=0$의 해 $a_1\geq b_1$에 대해서 $x^2+a_1x+b_1=0$이 실수해를 가질 경우, 그 중 하나는 음수가 되어야 함을 설명한다. (1점) 이를 이용해서 친화도의 최댓값이 1임을 보인다. (1점)	2점

7. 예시 답안

(1) $(a_0,b_0)=(-6,9)$인 경우, $(a_{1,}b_1)=(3,3)$이 된다. 이 경우에는 방정식 $x^2+3x+3=0$의 판별식이 $D=3^2-4\cdot 3=-3<0$이므로 실수해가 없다. 따라서 $(-6,9)$의 친화도는 잘 정의되고, 그 값은 1이다.

(2) $(a_0,b_0)=(-3,2)$인 경우, $(a_{1,}b_1)=(2,1)$이고, $(a_2,b_2)=(-1,-1)$이다. 일반적으로 (a_k,b_k)가 주어졌을 때, b_k가 음수이면, 방정식 $x^2+a_kx+b_k=0$의 판별식 $D=a_k^2-4b_k$이 항상 양수이므로 실수해가 존재한다. 근과 계수의 관계에 의해서 두 해의 곱은 b_k이므로 음수가 된다. 따라서 $a_{k+1}>0>b_{k+1}$이므로 b_{k+1}도 다시 음수가 된다. 수학적 귀납법에 의해서 모든 $k\geq 2$에 대해서 $(a_{k,}b_k)$가 존재하고 b_k는 음수이다. 따라서 $(-3,2)$의 친화도는 정의되지 않는다.

(3) 앞에서 관찰했듯이, b_k가 음수가 되는 k가 있으면 (a_0,b_0)의 친화도는 정의되지 않는다. (a_0,b_0)의 친화도가 정의된다고 가정하자. 만약 방정식 $x^2+a_0x+b_0=0$이 실수해를 가지지 않으면 (a_0,b_0)의 친화도는 0이다. 방정식 $x^2+a_0x+b_0=0$가 실수해 $a_{1,}b_1$을 가진다고 하자. 만약 b_1이 음수라면 (a_0,b_0)의 친화도는 정의되지 않고, $a_1\geq b_1$이므로 a_1, b_1은 모두 양수여야 한다.

만약 방정식 $x^2+a_1x+b_1=0$이 실수해를 가지지 않으면 (a_0,b_0)의 친화도는 1이다. 그런데 방정식 $x^2+a_1x+b_1=0$이 실수해를 가지면, 근과 계수의 관계에 의해서 두 해의 곱은 $b_1>0$이고 합은 $-a_1<0$이다. 따라서 두 실수해는 모두 음수가 된다. 문제 (2)에 의해서 이 경우 (a_0,b_0)의 친화도는 정의되지 않는다. 따라서 (a_0,b_0)의 친화도가 정의될 경우, 그 친화도는 0또는 1일 수 밖에 없다. 실제 앞의 문제 (1)에서 친화도가 1이 되는 순서쌍이 있음을 확인했으므로, 친화도의 최댓값은 1이다.

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

새롭게 정의된 친화도라는 개념을 이해하고 고등학교 1학년 [수학]에서 학습한 이차방정식의 판별식, 이차방정식의 근과 계수의 관계 그리고 [수학 I]에서 학습한 수열의 귀납적 정의를 활용할 수 있는지 평가하기에 좋은 문항이다. (1)번은 친화도 개념을 이해하고 이차방정식을 풀이할 수만 있다면 누구나 해결할 수 있는 문항이고, (2)번은 이차방정식의 판별식 $D=b^2-4ac$ 이 항상 양수가 되는 경우와 근과 계수의 관계를 이용하고 수학적 귀납법을 활용하여 친화도를 구해야하는 점에서 학생들의 수학적 사고능력을 평가하기 좋은 문항이다. (3)번은 (2)번에서 얻은 결과를 이용하여 귀납적으로 정의된 이차방정식의 실근의 부호에 따라 친화도의 최댓값을 구할 수 있는지 묻는 문항이다. 이처럼 새롭게 정의된 개념인 친화도를 수학적으로 명확하게 이해하고, 이차방정식과 수열의 귀납적 정의에 대한 학교 교육과정을 성실히 학습한 학생이라면 그리 어렵지 않게 해결했을 것이라 생각된다.

[고등학교 수학교사 B]

주어진 상황을 이차방정식의 판별식, 근과 계수의 관계, 수학적 귀납법 등을 이용하여 해결해야 하는 문제로써 이차방정식의 두 근 사이의 관계를 파악하고, 이차방정식의 두 근의 부호를 수학적 귀납법을 이용하여 판별할 수 있는지를 평가할 수 있는 좋은 문항이다. (1)번은 문제 상황에서 주어진 친화도라는 개념을 올바르게 파악하였는지를 평가하기 위한 문항이고, (2)번은 친화도가 정의되지 않는 조건을 발견할 수 있는지를 평가하기 위한 문항으로 근과 계수의 관계, 수학적 귀납법 등을 이용해야 한다는 점에서 학생들의 논리적 사고력을 평가하기에 좋은 문항이다. (3)번은 (2)번에서 발견한 사실과 근과 계수의 관계를 이용하여 친화도의 최댓값을 구하는 문항으로 학생들이 문제 상황에서 발견한 사실과 고교교육과정에서 학습한 내용을 융합하여 해결해야한다는 측면에서 학생들의 사고력을 평가하기에 매우 좋은 문항이라 사료된다. [수학]에서 이차방정식의 근과 계수의 관계, 이차방정식의 판별식, [수학 I]에서 수학적 귀납법 등의 교육과정을 성실히 학습한 학생들은 쉽게 접근하여 해결할 수 있었으리라 사료된다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**미래엔 수학 교과서 60p. 4번 문제**
근거	• 이차방정식의 판별식을 이용하는 문제로 (2)번에서 $D=b^2-4ac$에서 ac의 부호가 음수이면 $D>0$이므로 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다는 것을 이용하여 문제를 해결한다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2021학년도 수능 연계교재 EBS 수능특강 수학Ⅰ 100p. 3번**
근거	• 대수적 상황이나 기하학적 상황에서 수열 $\{a_n\}$을 정의하고, a_n에 따라 a_{n+1}이 결정되는 수열의 귀납적 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

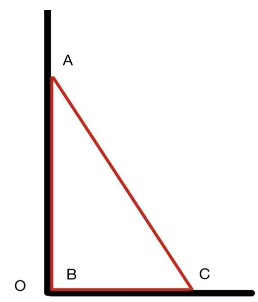
[한국과학기술원(KAIST) 문항정보 4]

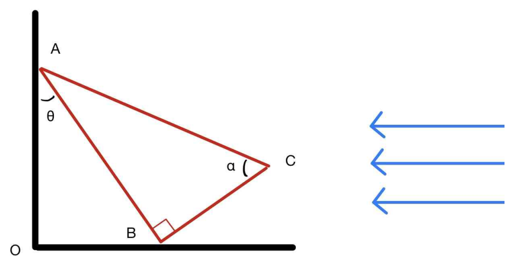
1. 일반정보

유형	☐ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사 ☐ 선다형고사	
전형명	학교장추천전형, 고른기회전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	삼각함수, 삼각함수의 덧셈정리, 삼각함수의 미분, 도함수를 활용한 함수의 최댓값과 최솟값 구하기
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

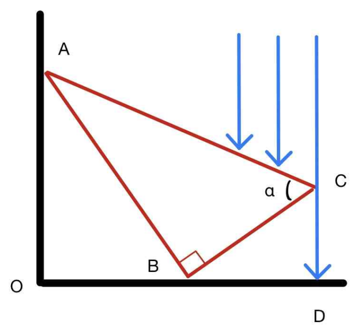
오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC가 있고 선분 AB의 길이는 4이며 선분 BC의 길이는 3이다. 직각삼각형 ABC가 형태를 변형하지 않으며 움직이는데, 점 A는 벽을 따라 바닥에 닿을 때까지 아래로, 점 B는 바닥을 따라 오른쪽으로 움직인다. 벽과 바닥이 만나는 점을 O라고 하자. (아래 문항에서 빛은 직각삼각형 ABC를 뚫고 지나가지 않는다.)

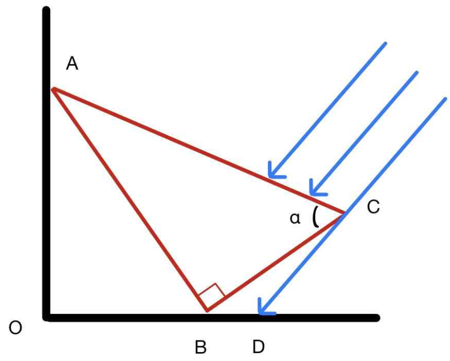




(1) 각 OAB를 θ라고 하고 각 BCA를 α라고 하자. 오른쪽에서 수평으로 빛을 벽을 향해 비출 때 벽에 생기는 그림자의 길이를 θ에 대한 함수로 나타내시오. (1점)

(2) 점 O와 점 B사이의 거리를 x라고 하자. 이번에는 위에서 수직으로 빛을 바닥을 향해 비춘다. 오른쪽 그림과 같이 바닥에 생긴 그림자에서 점 C에 대응되는 점을 D라고 하자. 사다리꼴 $AODC$의 넓이가 최대가 될 때, x값을 구하시오. (2점)





(3) 이번에는 바닥과 45° 각도로 빛을 비춘다. 왼쪽 그림과 같이 바닥에 생긴 그림자에서 점 C에 대응하는 점 D가 점 B의 오른쪽에 있을 때까지만 삼각형 ABC를 움직인다. 사각형 $AODC$의 넓이가 최대가 될 때, 삼각형 AOB의 넓이를 구하시오. (2점)

3. 출제 의도

- 평면 기하를 잘 이해하고 있는지 확인함과 동시에 미분을 활용하여 주어진 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

적용 교육과정		예)교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문		학습내용 성취 기준
(1)	교육과정	수학Ⅰ - (2) 삼각함수 1. 삼각함수
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
(2)	교육과정	수학Ⅰ - (2) 삼각함수 1. 삼각함수 미적분 - (2) 미분법 1. 여러 가지 함수의 미분
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
(3)	교육과정	수학Ⅰ - (2) 삼각함수 1. 삼각함수 미적분 - (2) 미분법 1. 여러 가지 함수의 미분 미적분 - (2) 미분법 3. 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	[12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	황선욱 외	미래엔	2018.3.	74~79
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019.3.	63~69, 75, 76, 110, 111, 117
기타					

5. 문항 해설

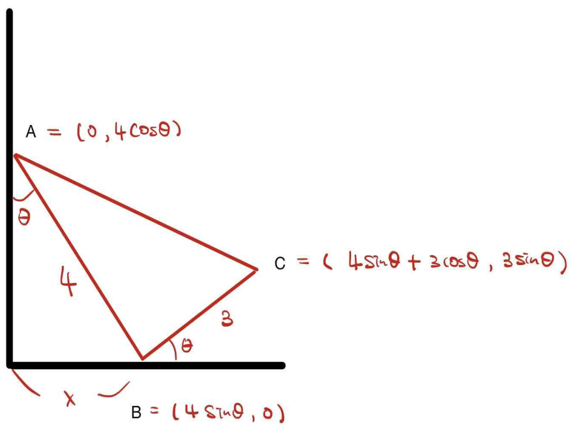
(1)번은 벽에 수직으로 비추는 빛에 의해 직각삼각형 ABC의 그림자가 변AB의 그림자에서 변 BC의 그림자로 변하는 과정을 파악하고 이를 θ에 관한 삼각함수로 나타내는 문항이다.
(2)번은 바닥에 수직으로 비추는 빛에 의해 직각삼각형 ABC의 그림자를 높이로 하고, 선분 AO와 선분 CD를 윗변과 아랫변으로 하는 사다리꼴의 넓이를 θ에 관한 삼각함수로 나타내어 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 사다리꼴의 넓이의 최댓값을 구하는 문항이다.
(3)번은 바닥과 $45°$ 각도를 이루며 비추는 빛에 의해 만들어지는 사각형 AODC의 넓이를 θ에 관한 삼각함수로 나타내고, 삼각함수의 미분을 이용하여 함수의 최댓값을 갖는 θ의 삼각비를 구하여 주어진 값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

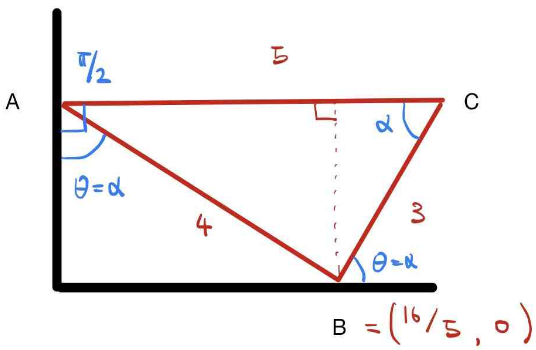
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	그림자의 길이를 θ에 대한 함수로 맞게 나타내면 1점	1점
(2)	사다리꼴 AODC의 넓이를 식으로 맞게 나타내면 1점 사다리꼴 AODC의 넓이가 최대가 되는 순간 x값을 맞게 구하면 1점	2점
(3)	미분을 사용하여 최대값을 가지는 θ를 구하면 1점 사각형 AODC의 넓이가 최대가 되는 순간 삼각형 AOB의 넓이를 맞게 구하면 1점	2점

7. 예시 답안

바닥과 벽을 각각 x축 y축으로 생각한다. 선분 AB와 y축이 이루는 각이 θ이고 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다. 또한, 점 A의 x좌표는 0, y좌표는 $4\cos\theta$, 점 B의 x좌표는 $4\sin\theta$, y좌표는 0, 점 C의 x좌표는 $4\sin\theta + 3\cos\theta$, y좌표는 $3\sin\theta$ 이다.

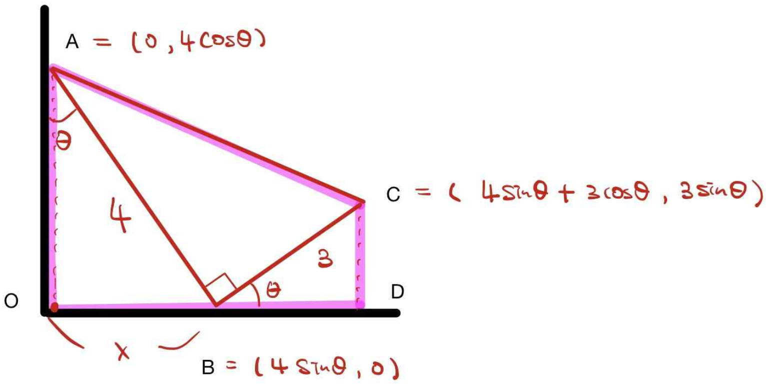


(1) 아래 그림을 통하여 점 A의 y좌표와 점 C의 y좌표는 $\theta = \alpha$일 때 같으며, $\theta < \alpha$이면 점 A의 y좌표가 더 크고, $\theta > \alpha$이면 점 C의 y좌표가 더 크다는 사실을 알 수 있다.



따라서, $f(\theta) = \begin{cases} 4\cos\theta & (0 \le \theta \le \alpha) \\ 3\sin\theta & \left(\alpha < \theta \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(2) 아래 그림을 통하여 다음을 알 수 있다.



사다리꼴 AODC의 넓이 = 삼각형 ABC의 넓이 + 삼각형 AOB의 넓이 + 삼각형 BDC의 넓이

즉, 사다리꼴 AODC의 넓이는 $6+8\sin\theta\cos\theta+\frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta=6+\frac{25}{4}\sin2\theta$이다.

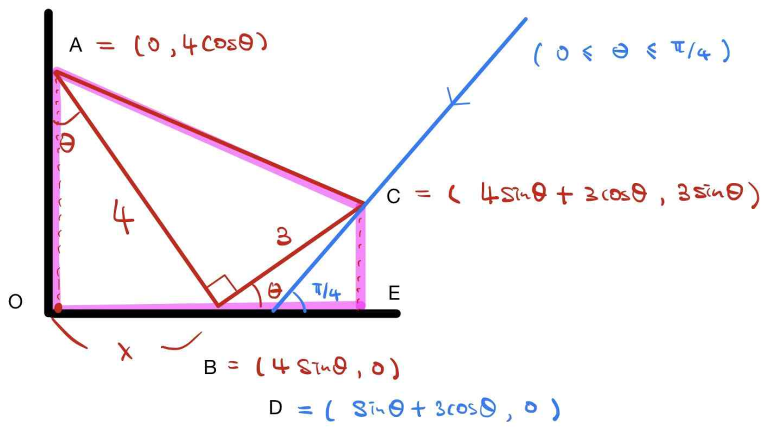
(삼각함수의 덧셈정리를 통해 $\sin2\theta=\sin(\theta+\theta)=2\sin\theta\cos\theta$임을 유도할 수 있음)

따라서 사다리꼴 넓이는 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 최댓값을 가지므로 $x=4\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$이다.

(3) 점 D가 점 B의 오른쪽에 있을 조건은 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$이다. 아래 그림에서 점 D의 x좌표가 $\sin\theta+3\cos\theta$임을 알 수 있고, 사각형 AODC의 넓이는 사다리꼴 AOEC의 넓이에서 삼각형 CDE의 넓이를 뺀 것이므로

구하는 사각형 AODC의 넓이 $f(\theta)$는 $f(\theta)=6+\frac{25}{4}\sin2\theta-\frac{9}{2}\sin^2\theta$가 된다.

특히, $\theta=\frac{\pi}{4}$이면 사각형 AODC의 넓이는 10이 된다.



$f(\theta)$를 미분하면,

$f'(\theta) = \frac{25}{2}\cos 2\theta - 9\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{25}{2}\cos 2\theta - \frac{9}{2}\sin 2\theta$ 이고,

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$이므로 $f(\theta)$는 $\tan 2\theta = \frac{25}{9}$, $\sin 2\theta = \frac{25}{\sqrt{706}}$, 그리고 $\cos 2\theta = \frac{9}{\sqrt{706}}$일 때 최댓값을 가진다. (참고: 이때, $f(\theta) = \frac{15+\sqrt{706}}{4} > 10$이다.)

따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $8\sin\theta\cos\theta = 4\sin 2\theta = \frac{100}{\sqrt{706}}$이다.

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

직각삼각형 ABC의 움직임과 빛의 방향에 따라 생기는 그림자의 변화를 파악하여 주어진 문제상황을 해결하는 문항으로, [수학 Ⅰ]에서 학습한 삼각함수, 그리고 [미적분]에서 학습한 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 미분을 통한 함수의 최댓값 구하기를 활용할 수 있는지 평가하기에 좋은 문항이다. (1)번은 좌표평면에서 삼각형 ABC의 각 꼭짓점의 좌표를 θ를 이용하여 표현하고 직각삼각형의 움직임에 따라 그림자의 길이를 θ에 관한 함수로 나타낼 수 있는지 묻는 문항으로 삼각함수의 정의만 정확히 알고 있다면 쉽게 해결할 수 있는 문항이다. (2)번은 사다리꼴의 넓이를 삼각함수로 나타낸 후 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$임을 유도하여 사다리꼴 넓이의 최댓값을 구하는 문항이고, (3)번은 주어진 사각형의 넓이를 θ에 관한 함수로 나타내고 미분을 이용하여 사각형의 넓이가 최대가 되는 θ를 이용하여 삼각형의 넓이를 찾는 문항으로써 교과서나 모의고사 등에서 자주 다루는 소재이므로 어렵지 않게 해결했으리라 생각된다. 평면기하에 대한 기본적인 이해를 바탕으로 삼각함수, 미적분 등에 대한 수학적 개념을 융합하여 사고할 수 있는지 평가할 수 있는 좋은 문항이다.

[고등학교 수학교사 B]

직각삼각형이 주어진 조건에 따라 움직일 때 생기는 그림자의 길이, 사각형의 넓이의 최댓값에 관한 실생활 융합 문제로써 삼각함수를 이용하여 그림자의 길이, 사각형의 넓이를 표현할 수 있는지, 미분법을 이용하여 삼각함수로 표현되어있는 식이 최대가 되는 각의 값을 구할 수 있는지를 평가할 수 있는 좋은 문항이다. (1)번은 삼각함수의 정의를 이용하여 그림자의 길이를 구하는 문항으로 문제 상황을 올바르게 파악하였는지를 평가하기 위한 간단한 문항이다. (2)번은 사다리꼴의 넓이를 삼각함수를 이용하여 표현하고 이를 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 간단히 나타내며 미분법을 이용하여 사다리꼴의 넓이가 최대가 되는 각의 값을 구해야 하는 문항으로 학생들의 대수적 사고 능력을 평가하기에 좋은 문항이다. (3)번은 (2)번에서 구한 값에서 직각삼각형의 넓이를 제외한 값의 최댓값을 구하는 문항으로 학생들이 고교교육과정에서 학습한 내용뿐만 아니라 문제 해결 과정에서 발견한 사실도 활용할 수 있는지를 평가한다는 측면에서 매우 좋은 문항이라 사료된다. 도형의 넓이의 최댓값 및 최솟값과 삼각함수 관련 문제는 교과서, 수능 등에서 많이 출제되는 소재이므로 [수학 Ⅰ]에서 삼각함수의 정의, 삼각함수의 덧셈정리, [미적분]에서 삼각함수의 미분법 등을 성실히 학습한 학생들은 쉽게 접근하여 해결할 수 있었으리라 사료된다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2018학년도 6월 모의평가 수학(가) 28번 문제** **2020학년도 9월 모의평가 수학(가) 20번 문제**
근거	• 삼각형 또는 사각형의 넓이나 길이를 주어진 각 θ를 이용하여 삼각함수로 표현하는 과정을 통해 문제를 해결한다.

< 유사 기출 문제 >	
유사문제	**2020학년도 6월 모의평가 수학(가) 12번 문제**
근거	• 삼각함수의 미분을 이용하여 함수의 극값을 구하고 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 통해 문제를 해결한다.