< 정답 및 해설 >

<정답>

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
정답	②	③	③	④	③	②	④	②	③	①	①	④	①
문항	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
정답	①	②	③	④	③	③	②	④	④	①	②	④	

<해설>

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

2. $f(\pi)=0$에서 $f^{-1}(0)=\pi$. $f'(x)=2-\cos x$에서 $f'(\pi)=3$이므로

$$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(\pi)}=\frac{1}{3}$$

3. $f(x)=\displaystyle\int_0^{3x}(t\sin t+\cos t-1)\,dt$의 양변을 미분하면

$f'(x)=3(3x\sin 3x+\cos 3x-1)$이므로 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-6$

4. 구하는 넓이를 A라 하면

$$A=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}\,dx=\left[\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}-\tan^{-1}0\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{18}$$

5. 구하는 부피를 V라 하고 원통껍질 방법(cylindrical shell method)을 적용하면

$$V=\int_0^{\pi/2}2\pi x\cos x\,dx=2\pi\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx$$

$$=2\pi\left([x\sin x]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx\right)$$

$$=2\pi\left([x\sin x]_0^{\pi/2}+[\cos x]_0^{\pi/2}\right)=\pi^2-2\pi$$

6. $r'(t)=\left\langle 2t,\,2,\,\dfrac{1}{t}\right\rangle$ 이므로 구하는 곡선의 호의 길이를 L이라 하면

$$L=\int_1^e |r'(t)|\,dt=\int_1^e \sqrt{4t^2+4+\frac{1}{t^2}}\,dt$$
$$=\int_1^e \sqrt{\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^e \left(2t+\frac{1}{t}\right)dt\ =\left[t^2+\ln t\right]_1^e=e^2$$

7. $r'(t)=\langle 1,\,-2\sin 2t,\,2\cos 2t\rangle$. 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\,0,\,1\right)$은 $t=\dfrac{\pi}{4}$에 대응하고 이 점에서

법평면은 벡터 $r'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left\langle 1,\,-2\sin\dfrac{\pi}{2},\,2\cos\dfrac{\pi}{2}\right\rangle=\langle 1,\,-2,\,0\rangle$에 수직인

평면이므로 법평면의 방정식은

$$1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2(y-0)+0(z-1)=0 \ \text{또는}\ x-2y=\frac{\pi}{4}$$

8. $\dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

$$=\left[-e^{-x}\sin(x+2y)+e^{-x}\cos(x+2y)\right]\cdot 2+\left[2e^{-x}\cos(x+2y)\right]\cdot(-1)$$
$$=-2e^{-x}\sin(x+2y)$$

$s=\dfrac{\pi}{2}$, $t=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때, $x=\pi$, $y=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{s=\frac{\pi}{2},\,t=\frac{\pi}{4}}=-2e^{-\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2e^{-\pi}$$

9. $f_x(x,\,y)=e^y+ye^x$, $f_y(x,\,y)=xe^y+e^x$ 이므로

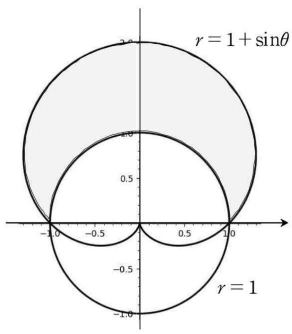
$$\nabla f(1,0)=\langle f_x(1,0),\ f_y(1,0)\rangle=\langle 1,\ e+1\rangle$$

v 방향의 단위벡터는 $u=\dfrac{1}{5}\langle 3,\ -4\rangle$이므로

$$D_u f(1,\,0)=\nabla f(1,\ 0)\cdot u=\frac{1}{5}(3-4e-4)=-\frac{4e+1}{5}$$

10. $1=1+\sin\theta$ 에서 $\sin\theta=0$, $\theta=0,\,\pi$ 이므로 구하는넓이 S는

$$S=2\left[\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\sin\theta)^2\,d\theta-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1)^2\,d\theta\right]$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(1+2\sin\theta+\sin^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{2}$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left(1+2\sin\theta+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta-\frac{\pi}{2}$$



$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta - \frac{\pi}{2}$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{4}\pi - (-2) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2$$

11. $y = e^x$, $y' = e^x$, $y'' = e^x$. 곡률 $\kappa(x) = \dfrac{|y''(x)|}{[1+y'(x)^2]^{3/2}}$ 이므로

점 $(0,1)$에서 곡률 $\kappa(0)$는 $\kappa(0) = \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. 따라서 점 $(0,1)$에서 곡선

$y = e^x$의 곡률원의 반지름은 $\dfrac{1}{\kappa(0)} = 2\sqrt{2}$

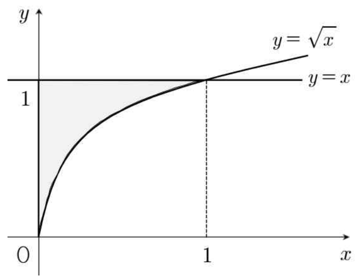
12. 영역 D는 그림으로부터 $D = \{ (x,y) | \, 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y^2 \}$으로 나타낼 수 있으므로 대응되는 반복적분은 다음과 같다.

$$\iint_D \frac{1}{1+y^3} \, dA = \int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{1}{1+y^3} \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{1+y^3} \right]_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{1+y^3} \, dy$$

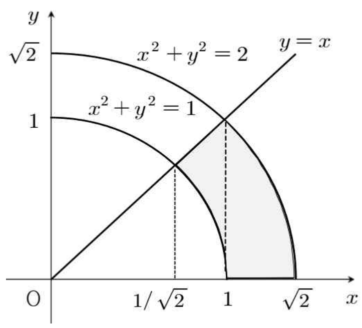
$$= \left[\frac{1}{3} \ln(1+y^3) \right]_0^1 = \frac{1}{3} \ln 2$$



13. 주어진 반복적분을 이중적분으로 나타내면 $\iint_D x \, dA$이고 영역 D는 다음과 같다.

$D = \{ (x,y) | 1 \le x^2 + y^2 \le 2, \ y \ge 0, \ y \le x \}$

$x = r\cos\theta, \, y = r\sin\theta$를 이용하여 반복적분으로 바꾸면



$$\iint_D x \, dA = \int_0^{\pi/4} \int_1^{\sqrt{2}} r\cos\theta \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^2 \, dr$$

$$= [\sin\theta]_0^{\pi/4} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$$

14. $I=\int_0^1 x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{1/2}dx$ 에서 $t=\ln\frac{1}{x}$ 라 하면 $x=e^{-t}$. $dx=-e^{-t}dt$

$$I=\int_\infty^0 e^{-t}\,t^{1/2}\left(-e^{-t}\right)dt=\int_0^\infty t^{1/2}e^{-2t}\,dt$$

이고, $u=2t$ 라 하면 $du=2dt$, $dt=\frac{1}{2}du$이므로

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{u}{2}\right)^{1/2}e^{-u}\,du=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty u^{1/2}\,e^{-u}\,du$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}$$

15. $M=4xy^3+\cos y$, $N=3kx^2y^2-x\sin y$라 하면

$M_y=12xy^2-\sin y$, $N_x=6kxy^2-\sin y$ 이므로 $M_y=N_x$ 에서 $k=2$

16. $\frac{1}{y^2}\,dy=-2x\,dx$, $-\frac{1}{y}=-x^2+c$, $y=\frac{1}{x^2-c}$. $y(1)=1$ 에서 $1=\frac{1}{1-c}$, $c=0$

이므로 $y(x)=\frac{1}{x^2}$. 따라서 $y(2)=\frac{1}{4}$

17. 보조방정식의 근은 $m_1=-1+2i$, $m_2=-1-2i$ 이므로 보조방정식은

$$[m-(-1+2i)]\,[m-(-1-2i)]=0 \Leftrightarrow m^2+2m+5=0$$

이므로 $y''+2y+5y=0$ 에서 $a=2$, $b=5$, 따라서 $a+b=7$

18. $\frac{dy}{dx}-y=-3y^2$ 에서 $y^{-2}y'-y^{-1}=-3$. $w=y^{-1}$이라 하면 $\frac{dw}{dx}+w=3$

적분인자는 $e^{\int 1\,dx}=e^x$ 이고 $\frac{d}{dx}[e^xw]=3e^x$, $e^xw=3e^x+c$ 에서 $w=3+ce^{-x}$

이므로 $y=\frac{1}{3+ce^{-x}}$ 이다. $y(0)=1$ 에서 $c=-2$ 이므로 $y(x)=\frac{1}{3-2e^{-x}}$.

따라서 $y(1)=\frac{e}{3e-2}$

19. $y''+4y=0$ 의 보조방식은 $\lambda^2+4=0$ 이고 $\lambda=2i$, $-2i$ 이므로 $y''+4y=0$ 의 일차독립인 해는 $y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$

$$W=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}=2$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \sec 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\tan 2x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \sec 2x \end{vmatrix} = 1$$

이고

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{\tan 2x}{2} \text{에서 } u_1 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|, \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{2} \text{에서 } u_2 = \frac{1}{2}x$$

이므로 $y'' + 4y = \sec 2x$의 특수해는

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + \frac{1}{2}x\sin 2x$$

20. $y'' - \frac{2x+1}{x}y' + \frac{x+1}{x}y = 0$ 이고

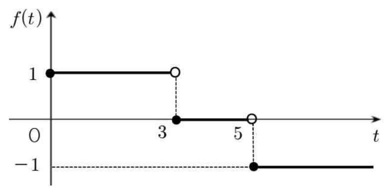
$$u(x) = \int \frac{e^{-\int \frac{-(2x+1)}{x}dx}}{e^{2x}}dx = \int \frac{e^{2x+\ln x}}{e^{2x}}dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$$

이므로 $y_2(x) = u(x)y_1(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$.

따라서 $y_1(x) = e^x$와 일차독립인 해는 x^2e^x

21. $f(t) = 1 - u(t-3) - u(t-5)$이고

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u(t-3)\} - \mathcal{L}\{u(t-5)\}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}$$



22. $f(t) = 1 + \cos t + f(t) * \sin t$ 이고 라플라스 변환을 취하면

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{f(t) * \sin t\}$에서

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} + F(s)\cdot\frac{1}{s^2+1}$$
$$\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right)F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1}$$

에서 $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^3}$ 이므로 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = 2 + \frac{1}{2}t^2$

23. $F(s) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{\pi}\right)$. $F'(s) = \frac{\pi}{s^2+\pi^2} = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$이므로

$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = \sin \pi t = -tf(t)$에서 $f(t) = -\frac{\sin \pi t}{t}$

24. $f(t)=t^2\sin t$라 하고 $f(t)=t^2\sin t$의 라플라스 변환을 $F(s)$라 하면

$$F(s)=\int_0^\infty t^2\sin t\, e^{-st}dt=\mathcal{L}\{t^2\sin t\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{\sin t\}$$

이고, 이 때

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

이므로 $F(s)=\dfrac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$. 따라서 $\displaystyle\int_0^\infty t^2\sin t e^{-t}dt=F(1)=\frac{1}{2}$

25. $\mathcal{L}\{y\}=Y$라 하고 라플라스 변환을 취하면

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-4[sY-y(0)]+4Y=\frac{5!}{(s-2)^6}$$

$(s^2-4s+4)Y=\dfrac{5!}{(s-2)^6}$에서 $Y=\dfrac{5!}{(s-2)^8}=\dfrac{5!}{7!}\cdot\dfrac{7!}{(s-2)^8}$ 이므로

$y(t)=\dfrac{1}{42}t^7e^{2t}$. 따라서 $y(1)=\dfrac{e^2}{42}$