2020학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	②	2	④	3	①	4	①	5	⑤
6	②	7	③	8	②	9	①	10	④
11	⑤	12	②	13	④	14	③	15	⑤
16	③	17	①	18	⑤	19	①	20	④
21	②	22	43	23	12	24	60	25	96
26	14	27	2	28	75	29	396	30	79

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3$

2. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{7}{n}-\frac{9}{n^2}}=4$$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

a_5는 a_4와 a_6의 등비중항이므로

$a_4\times a_6=(a_5)^2=2^2=4$

4. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$2^{x-4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, $2^{x-4}\le 2^{-x+2}$에서

밑 2가 1보다 크므로 $x-4\le -x+2$, $x\le 3$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 $1+2+3=6$

5. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4$$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2=67$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=4$, $\sum_{k=1}^{10}4=40$

이므로 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=11$

6. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

$a_n+2b_n-7=c_n$이라 하면

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-a_n+7}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty}c_n-\lim_{n\to\infty}a_n+7\right)=2$$

7. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!2!}=90$

a끼리 서로 이웃하도록 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!}=30$

따라서 구하는 경우의 수는 $90-30=60$

8. [출제의도] 등비수열의 극한 이해하기

$$\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}=\frac{(4x-1)^n}{8^n+9^n}=\frac{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n}{\left(\frac{8}{9}\right)^n+1}$$ 에서

$n\to\infty$일 때, $\left(\frac{8}{9}\right)^n\to 0$이므로 주어진 수열이 수렴하려면 등비수열 $\left\{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n\right\}$이 수렴해야 한다.

$-1<\frac{4x-1}{9}\le 1$에서 $-2<x\le\frac{5}{2}$이므로

수열 $\left\{\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}\right\}$이 수렴하기 위한

모든 정수 x의 개수는 4이다.

9. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

$\sin^2x=\cos^2x+\cos x$

$1-\cos^2x=\cos^2x+\cos x$

$2\cos^2x+\cos x-1=0$

$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0<x\le 2\pi$이므로

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-1$에서 $x=\pi$

$\sin\frac{\pi}{3}>\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{5}{3}\pi<\cos\frac{5}{3}\pi$, $\sin\pi>\cos\pi$

이므로 구하는 모든 x의 값의 합은 $\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi$

10. [출제의도] 호도법을 활용하여 문제해결하기

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\frac{3}{4}r$, $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r\times\frac{1}{3}r\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{16}r^2=4\sqrt{3}$, $r=8$

따라서 호 AB의 길이는 $8\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

11. [출제의도] 이항정리 이해하기

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2=x^4-2x+\frac{1}{x^2}$이므로

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2(x-2)^5$의 전개식에서 x의 계수는

다항식 $(x-2)^5$의 전개식에서 상수항과 x^3의 계수에 각각 -2와 1을 곱한 값의 합이다.

$(x-2)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r x^r(-2)^{5-r}$ $(r=0,\ 1,\ \cdots,\ 5)$이므로 구하는 값은

$(-2)\times{}_5\mathrm{C}_0\times(-2)^5+1\times{}_5\mathrm{C}_3\times(-2)^2=104$

12. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$$

$$\frac{\sin^2\theta\cos\theta+(1-\cos\theta)^2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$$

$$\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta+1)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$$

$\frac{2(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$, $\sin\theta=2\cos\theta$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$이므로 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

13. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$$\sum_{n=1}^{20}(-1)^n n^2=-1^2+2^2-3^2+4^2-\cdots-19^2+20^2$$
$$=\sum_{n=1}^{10}(2n)^2-\sum_{n=1}^{10}(2n-1)^2$$
$$=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\times\frac{10\times 11}{2}-10=210$$

【 다른 풀이 】

$\sum_{n=1}^{20}(-1)^n n^2$

$=(-1^2+2^2)+(-3^2+4^2)+\cdots+(-19^2+20^2)$

$=(-1+2)\times(1+2)+(-3+4)\times(3+4)$

$\quad+\cdots+(-19+20)\times(19+20)$

$=1+2+3+\cdots+20$

$=\frac{20\times 21}{2}=210$

14. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻 이해하기

$2\le n\le 4$일 때, $n-5<0$이므로

$f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=0$

$n=5$일 때, $n-5=0$이므로 $f(5)=1$

$6\le n\le 10$일 때, $n-5>0$이므로

$f(6)=2$, $f(7)=1$, $f(8)=2$, $f(9)=1$, $f(10)=2$

따라서

$\sum_{n=2}^{10}f(n)=0+1+0+1+2+1+2+1+2=10$

15. [출제의도] 급수의 합을 이용하여 추론하기

$\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$

$\log a_n a_{n+1}b_n=0$, $a_n a_{n+1}b_n=1$

$$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{3n+a_1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{a_1}=\frac{1}{12}$$

따라서 $a_1=4$

16. [출제의도] 로그함수를 이용하여 추론하기

정수 k에 대하여 $k<\log_3 f(n)<k+2$

밑 3이 1보다 크므로 $3^k<(n-3)^2+2<3^{k+2}$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.

(i) $k=0$인 경우

$1<(n-3)^2+2<9$, $-1<(n-3)^2<7$에서

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 $h(0)=5$

(ii) $k=3$인 경우

$27<(n-3)^2+2<243$, $25<(n-3)^2<241$

에서 $n=9,\ 10,\ \cdots,\ 18$이므로 $h(3)=10$

따라서 $h(0)+h(3)=15$

17. [출제의도] 등비수열의 합을 활용하여 문제해결하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 조건 (가)에서 $a=\frac{45}{4}$이고

조건 (나)에서는 $a=\frac{63}{2}$이므로 $r\ne 1$

$$\sum_{k=1}^{4}a_k=\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45$$

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k}=(a_2\times a_5)\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$$

$$=ar\times ar^4\times\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$=a^2r^5\times\frac{r^6-1}{a(r^6-r^5)}$$

$$=\frac{a(r^6-1)}{r-1}=189$$

$$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}=\frac{r^6-1}{r^4-1}$$

$$=\frac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}$$

$$=\frac{r^4+r^2+1}{r^2+1}=\frac{189}{45}$$

이므로

$5r^4+5r^2+5=21r^2+21$

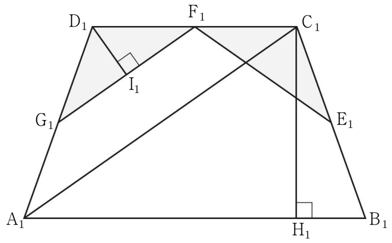
$5r^4-16r^2-16=0$, $(5r^2+4)(r^2-4)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

$\frac{a(2^4-1)}{2-1}=15a=45$이므로 $a=3$

따라서 $a_3=3\times2^2=12$

18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



점 C_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 직각삼각형 $C_1H_1B_1$에서 $\overline{B_1H_1}=2$이므로

$\overline{C_1H_1}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$이고,

직각삼각형 $A_1H_1C_1$에서

$\overline{A_1C_1}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$

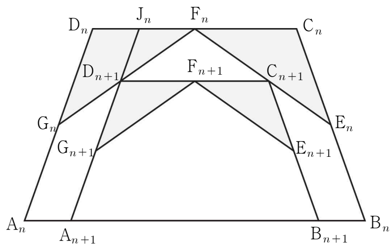
삼각형 $A_1C_1D_1$과 삼각형 $G_1F_1D_1$은 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이므로 $\overline{G_1F_1}=2\sqrt{6}$

점 D_1에서 선분 G_1F_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면 직각삼각형 $D_1I_1F_1$에서

$\overline{D_1I_1}=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$

$S_1=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=6\sqrt{2}$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$에서 $\overline{A_nB_n}:\overline{A_nD_n}=5:3$이고, 사다리꼴 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}:\overline{A_{n+1}D_{n+1}}=5:3$이므로

두 선분 A_nD_n과 $A_{n+1}D_{n+1}$이 서로 평행하다.

직선 $A_{n+1}D_{n+1}$이 선분 C_nD_n과 만나는 점을 J_n이라 하자.

두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}F_nJ_n$은 서로 닮음이고, $\angle D_nF_nG_n=\angle C_{n+1}D_{n+1}F_n$이므로 두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}C_{n+1}F_n$은 서로 닮음이다.

$\overline{D_nC_n}=a_n$, $\overline{D_{n+1}C_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

이등변삼각형 $D_{n+1}C_{n+1}F_n$에서

$\overline{D_{n+1}C_{n+1}}:\overline{D_{n+1}F_n}=2\sqrt{6}:3$이므로

$\overline{D_{n+1}F_n}=\frac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}C_{n+1}}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_{n+1}$이고,

이등변삼각형 $D_{n+1}F_nJ_n$에서

$\overline{D_{n+1}F_n}:\overline{D_{n+1}J_n}=2\sqrt{6}:3$이므로

$\overline{D_{n+1}J_n}=\frac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}F_n}=\frac{3}{8}a_{n+1}$

$\overline{A_{n+1}J_n}=\overline{A_{n+1}D_{n+1}}+\overline{D_{n+1}J_n}$이므로

$a_n=\overline{A_{n+1}J_n}=a_{n+1}+\frac{3}{8}a_{n+1}=\frac{11}{8}a_{n+1}$

$a_{n+1}=\frac{8}{11}a_n$이므로 두 사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $11:8$이며 넓이의 비는 $121:64$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $6\sqrt{2}$이고 공비가 $\frac{64}{121}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6\sqrt{2}}{1-\frac{64}{121}}=\frac{242}{19}\sqrt{2}$$

19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$R^2\pi=\frac{49}{3}\pi$, $R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $\overline{BC}=2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$7^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

$a^2-3a-40=0$, $(a-8)(a+5)=0$

$a>0$이므로 $a=8$

$\overline{AC}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

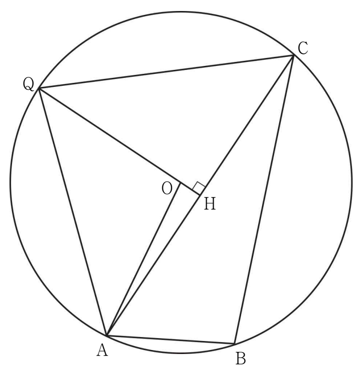
$\cos(\angle CBA)=\frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\frac{1}{7}$

이므로 $\frac{\pi}{2}<\angle CBA<\pi$가 되어

삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{QH}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$

20. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 추론하기

(ⅰ) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$

이다.

$A=\{1, 2, 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로 집합 B는

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

이다.

(a) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 경우

집합 A의 원소인 1, 2, 3이 1에 대응하는 경우의 수는 1이고, 4, 5가 2, 3에 하나씩 대응하는 경우의 수는 2이므로

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 함수 f의 개수는 $1\times2=\boxed{2}$이다.

(b) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 경우

$\{f(1), f(2), f(3)\}=\{1, 2\}$이고

4, 5가 1, 2, 3에 대응하되 적어도 하나가 3에 대응하는 경우이므로

$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 함수 f의 개수는

$({}_2\Pi_3-2)\times({}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2)=6\times5=\boxed{30}$이다.

(a), (b)와 같은 경우가 각각 3가지이므로

$n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는

$4\times(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30})$이다.

(ⅱ) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1, 2, 4, 5\}$뿐이므로 이 경우 $X-A=\{3\}$에 의해 $n(B)=3$이므로 집합 B는 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$이다.

$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 4\}$인 경우

$f(3)=5$이고 집합 A의 원소 중 어떠한 두 원소는 서로 같은 함숫값을 가져야 하므로 1, 2, 4를 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로 정하는 경우의 수는 $3\times\frac{4!}{2!}=3\times12=36$이다.

그러므로 $n(A)=4$, $n(B)<4$이고

집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는 $4\times36=\boxed{144}$이다.

(iii) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고 $n(B)=5$이므로 조건 $n(A)>n(B)$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$4\times\left(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30}\right)+\boxed{144}$이다.

따라서 $p=2$, $q=30$, $r=144$이므로 $p+q+r=176$

21. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{k}\pi$라 하면

함수 $f(m)$의 주기가 k이므로

집합 A_k는 $A_k=\{f(1), f(2), \cdots, f(k)\}$이다.

ㄱ. $k=3$일 때, $f(1)=0$, $f(2)=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(3)=\sin\dfrac{2\times2}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$A_3=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (참)

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되려면 $f(m)=1$을 만족시키는 자연수 $m(m=1, 2, \cdots, k)$가 존재해야 한다.

$\sin\dfrac{2(m-1)}{k}\pi=1$에서 $\dfrac{2(m-1)}{k}\pi=\dfrac{\pi}{2}$

$m=1+\dfrac{k}{4}$이고 m이 자연수이므로

k는 4의 배수이어야 한다.

따라서 $k=12, 16, \cdots, 96$이며

그 개수는 22이다. (참)

ㄷ. 4 이상의 자연수 k에 대하여

(i) $k=4l$(l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l}\pi=\sin\dfrac{m-1}{2l}\pi$이므로

$m=1$일 때, $f(1)=\sin\dfrac{1-1}{2l}\pi=\sin0=0$

$m=l+1$일 때,

$f(l+1)=\sin\dfrac{l+1-1}{2l}\pi=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

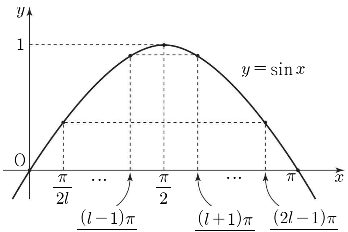
$m=2l+1$일 때,

$f(2l+1)=\sin\dfrac{2l+1-1}{2l}\pi=\sin\pi=0$

$m=\alpha(\alpha=2, 3, \cdots, l)$일 때,

$\pi-\dfrac{\alpha-1}{2l}\pi=\dfrac{(2l+2-\alpha)-1}{2l}\pi$

이므로 $\beta=2l+2-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는

$f(2), f(3), \cdots, f(l+1)$이고

그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$l+l+1=2l+1$

(ii) $k=4l+1$(l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l+1}\pi$이므로

$m=1$일 때,

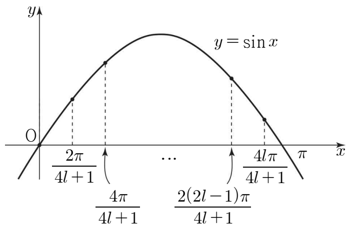
$f(1)=\sin\dfrac{2\times(1-1)}{4l+1}\pi=\sin0=0$

$4l+1$ 이하의 서로 다른 두 자연수 r, s에 대하여

$\dfrac{2(r-1)}{4l+1}\pi+\dfrac{2(s-1)}{4l+1}\pi=\dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi$

에서 $4l+1$은 홀수이고 $2(r+s-2)$는 짝수이므로

$\dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq\pi$, $\dfrac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq3\pi$이다.



따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+1$

(iii) $k=4l+2$(l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\dfrac{2(m-1)}{4l+2}\pi=\sin\dfrac{m-1}{2l+1}\pi$

$m=1$일 때,

$f(1)=\sin\dfrac{1-1}{2l+1}\pi=\sin0=0$

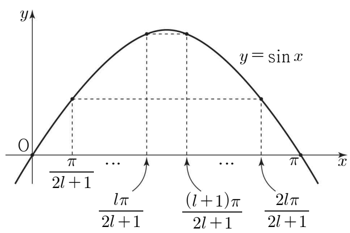
$m=2l+2$일 때,

$f(2l+2)=\sin\dfrac{2l+2-1}{2l+1}\pi=\sin\pi=0$

$m=\alpha(\alpha=2, 3, \cdots, l+1)$일 때,

$\pi-\dfrac{\alpha-1}{2l+1}\pi=\dfrac{(2l+3-\alpha)-1}{2l+1}\pi$

이므로 $\beta=2l+3-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는

$f(2), f(3), \cdots, f(l+1)$이고

그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$l+l+1=2l+1$

(iv) $k=4l+3$(l은 자연수)인 경우

(ii)와 같은 방법으로 구하면 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+3$이다.

$A_1=A_2=\{0\}$이고 (i) ~ (iv)에 의하여

집합 A_k의 원소의 개수는

$$n(A_k)=\begin{cases}4l-3 & (k=4l-3)\\ 2l-1 & (k=4l-2)\\ 4l-1 & (k=4l-1)\\ 2l+1 & (k=4l)\end{cases}\ (l\text{은 자연수})$$

$k=4l-3$인 경우 $4l-3=11$을 만족시키는 자연수 l은 존재하지 않는다.

$k=4l-2$인 경우 $2l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은 6이므로 $k=22$

$k=4l-1$인 경우 $4l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은 3이므로 $k=11$

$k=4l$인 경우 $2l+1=11$을 만족시키는 자연수 l은 5이므로 $k=20$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 $22+11+20=53$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

22. [출제의도] 순열과 조합 계산하기

${}_6\Pi_2+{}_2\mathrm{H}_6=6^2+{}_7\mathrm{C}_6=36+{}_7\mathrm{C}_1=36+7=43$

23. [출제의도] 등차수열 이해하기

$a_1=6$이고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3+a_6=(6+2d)+(6+5d)=12+7d$, $a_{11}=6+10d$

$a_3+a_6=a_{11}$이므로 $12+7d=6+10d$에서 $d=2$

따라서 $a_4=6+3\times2=12$

24. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=2^{x+p}+q$의 그래프의 점근선이

직선 $y=q$이므로 $q=-4$

$f(0)=0$이므로 $2^p-4=0$, $p=2$

따라서 $f(4)=2^6-4=60$

25. [출제의도] 원순열을 활용하여 문제해결하기

A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명을

각각 한 학생으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로

배열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{5}=4!=24$

이 각각에 대하여 A학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2, B학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로

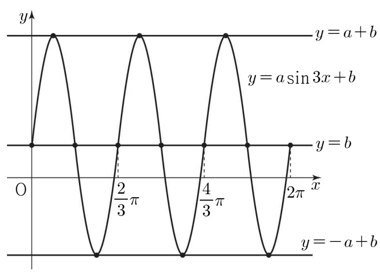
구하는 경우의 수는 $24\times2\times2=96$

26. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

함수 $y=a\sin3x+b$의 그래프의 주기가 $\dfrac{2}{3}\pi$이므로

$0\le x\le2\pi$에서 함수 $y=a\sin3x+b$의

그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=a\sin3x+b$의 그래프가

직선 $y=k$와 만나는 점의 개수는

$k=-a+b$ 또는 $k=a+b$일 때, 3

$k=b$일 때, 7

이므로 $b=2$이고, $-a+2=9$ 또는 $a+2=9$

a가 양수이므로 $a=7$

따라서 $a\times b=7\times2=14$

27. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 (n, n)에서 직선 $y=x$와 접하는 원의 중심은

직선 $y=-x+2n$ 위에 있으므로 $b_n=-a_n+2n$

원의 중심이 두 점 (n, n), $(1, 0)$으로부터

같은 거리만큼 떨어져 있으므로

$(a_n-n)^2+\{(-a_n+2n)-n\}^2=(a_n-1)^2+(-a_n+2n)^2$

$a_n=\dfrac{2n^2+1}{2}$, $b_n=-\dfrac{2n^2+1}{2}+2n$

$a_n-b_n=2n^2-2n+1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n+1}{n^2}=2$$

28. [출제의도] 로그함수를 활용하여 문제해결하기

$\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$이므로 점 A의 좌표는 (k, k)이고, 점 B의 좌표는 $(2k, k)$이다.

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ ⋯ ㉠

점 B는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서

$2k^2=1$이므로 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=\left|\log_a x\right|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$-\log_a\alpha=2\sqrt{2}$에서 $\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

$\log_a\beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$

㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\begin{aligned}d&=\beta-\alpha\\&=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}\\&=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}\\&=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

따라서 $20d=20\times\dfrac{15}{4}=75$

29. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기

철학, 사회과학, 자연과학 분야에 해당하는 책은 반드시 선택해야 하므로 최소 3개 분야에서 최대 5개 분야에 해당하는 책을 선택할 수 있다.

철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에서 선택한 책의 권수를 순서대로 a, b, c(a, b, c는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

(i) 3개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우

$a+b+c=24$에서

$a=4$일 때, $b+c=20$을 만족시키는

순서쌍 (b, c)의 개수는 1

$a=5$일 때, $b+c=19$를 만족시키는

순서쌍 (b, c)의 개수는 2

⋮

$a=10$일 때, $b+c=14$를 만족시키는

순서쌍 (b, c)의 개수는 7

따라서 구하는 경우의 수는 $1+2+\cdots+7=28$

(ii) 4개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우

문학 또는 역사 분야 중 한 분야를 선택하는 경우의 수는 2이고 선택된 분야에서 선택한 책의 권수를 d(d는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$ (a', b', c', d'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라 하면 $a+b+c+d=24$에서

$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)=24$

$a'+b'+c'+d'=8$

방정식 $a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$에서

a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 7인 경우의 수 ${}_4C_1\times\mathrm{HLSUB}3_1=12$와

a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 8인 경우의 수 4를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times(165-12-4)=298$

(iii) 5개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우

문학 분야와 역사 분야에서 선택한 책의 권수를 각각 d, e(d, e는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$, $e=e'+4$(a', b', c', d', e'은 6 이하의 음이 아닌 정수)라 하면

$a+b+c+d+e=24$에서

$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)+(e'+4)=24$

$a'+b'+c'+d'+e'=4$

방정식 $a'+b'+c'+d'+e'=4$를 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5H_4={}_8C_4=70$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$28+298+70=396$

30. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

두 조건 (가)와 (나)로부터 $a_{2n}+a_{2n+1}=2b_n+1$

두 조건 (다)와 (라)로부터 $b_{2n}+b_{2n+1}=2a_n+1$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n\\&=a_1+\sum_{n=1}^{31}\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right)-\sum_{n=1}^{31}b_n\\&=a_1+\sum_{n=1}^{31}\left(2b_n+1\right)-\sum_{n=1}^{31}b_n\\&=a_1+\sum_{n=1}^{31}b_n+31\\&=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}\left(b_{2n}+b_{2n+1}\right)+31\\&=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}\left(2a_n+1\right)+31\\&=a_1+b_1+2\sum_{n=1}^{15}a_n+15+31\\&=a_1+b_1+2a_1+2\sum_{n=1}^{7}\left(2b_n+1\right)+46\\&=a_1+b_1+2a_1+4\sum_{n=1}^{7}b_n+14+46\\&=a_1+b_1+2a_1+4b_1+4\sum_{n=1}^{3}\left(2a_n+1\right)+60\\&=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8\sum_{n=1}^{3}a_n+12+60\\&=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+8\left(2b_1+1\right)+72\\&=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+16b_1+8+72\\&=11a_1+21b_1+80=155\end{aligned}$$

그러므로 $11a_1+21b_1=75$ ⋯ ㉠

조건 (가)와 (다)에서

$a_{4n}=b_{2n}+2=\left(3a_n-2\right)+2=3a_n$,

$b_{4n}=3a_{2n}-2=3\left(b_n+2\right)-2=3b_n+4$

이므로

$a_{48}=3a_{12}=9a_3=9\left(b_1-1\right)=9$, $b_1=2$

㉠에 의하여 $a_1=3$

따라서 $b_{32}=3b_8+4=9b_2+16=9\left(3a_1-2\right)+16=79$