2020학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[나형]

1	②	**2**	③	**3**	②	**4**	③	**5**	①
6	⑤	**7**	④	**8**	②	**9**	③	**10**	①
11	⑤	**12**	⑤	**13**	④	**14**	①	**15**	②
16	⑤	**17**	③	**18**	①	**19**	④	**20**	①
21	⑤	**22**	8	**23**	17	**24**	22	**25**	27
26	10	**27**	139	**28**	6	**29**	40	**30**	35

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$3\times 8^{\frac{1}{3}}=3\times\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}=3\times 2=6$

2. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 0}(x^2+x+3)=\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}3=3$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

$a_2=2\times 5=10$

4. [출제의도] 정적분 계산하기

$\int_0^1(3x^2+2)dx=\left[x^3+2x\right]_0^1$

$=(1+2)-(0+0)=3$

5. [출제의도] 수열의 합의 성질 이해하기

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=2\times 10-3=17$

6. [출제의도] 로그함수 이해하기

$7=a+\log_2 4=a+2$

$a=5$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(-1)+\lim_{x\to 2+}f(x)=1+3=4$

8. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$a+3=5,\ a=2$

9. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_3\left(10\times\frac{9}{5}\div\frac{2}{3}\right)=\log_3 27=3$

10. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-4}{2h}=1$이고 $\lim_{h\to 0}2h=0$이므로

$\lim_{h\to 0}\{f(3+h)-4\}=0,\ f(3)=4$

$\frac{1}{2}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{f'(3)}{2}=1$

$f'(3)=2$

따라서 $f(3)+f'(3)=6$

11. [출제의도] 이항정리 이해하기

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r 2^r x^{5-2r}$

$x^{5-2r}=x$에서 $5-2r=1,\ r=2$

따라서 x의 계수는 ${}_5C_2\times 2^2=40$

12. [출제의도] 중복조합 이해하기

$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$로 놓으면 방정식 $x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 $x,\ y,\ z,\ w$의 모든 순서쌍 (x,y,z,w)의 개수는 방정식 $x'+y'+z'+w'=7$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다. 방정식 $x'+y'+z'+w'=7$의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 $x',\ y',\ z',\ w'$ 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7=120$

13. [출제의도] 사인법칙 이해하기

사인법칙에 의해

$\frac{5}{\sin\theta}=2\times 4$

$\sin\theta=\frac{5}{8}$

14. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(x)$가 다항함수이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=3$이므로

$f(x)=3x^2+ax+b$ ($a,\ b$는 실수)

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=6$이고 $\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$

$f(2)=12+2a+b=0,\ b=-2a-12$

$f(x)=3x^2+ax+(-2a-12)$

$=(x-2)(3x+6+a)$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+6+a)}{(x-2)(x+1)}$

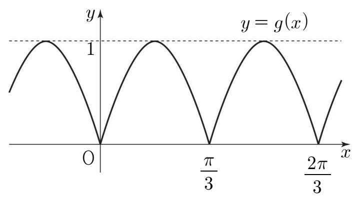
$=\frac{6+6+a}{3}=6$

$a=6,\ b=-24$

$f(x)=3x^2+6x-24,\ f(0)=-24$

15. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 추론하기

함수 $g(x)=|\sin 3x|$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$

두 함수 $f(x),\ g(x)$의 주기가 서로 같으므로

$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{3}$

a는 양수이므로 $a=6$

16. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$3f(1)=0+2,\ f(1)=\frac{2}{3}$

$3xf(x)=9\int_1^x f(t)dt+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3\{f(x)+xf'(x)\}=9f(x)+2$

$x=1$을 대입하면

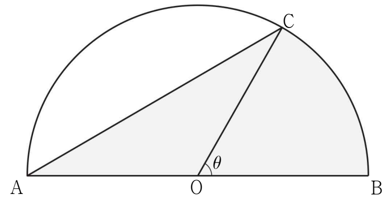
$3\{f(1)+f'(1)\}=9f(1)+2$

$3f'(1)=6f(1)+2=6\times\frac{2}{3}+2=6$

따라서 $f'(1)=2$

17. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

반원의 중심을 O라 하고 부채꼴 OBC의 중심각의 크기를 θ라 하자.



반원의 반지름의 길이가 6이고 호 CB의 길이가 2π이므로

$2\pi=6\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$

부채꼴 OBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{3}=6\pi$

$\angle COA=\frac{2\pi}{3}$이므로

삼각형 CAO의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\sin\frac{2\pi}{3}=9\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는 $6\pi+9\sqrt{3}$

18. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $\left(\sqrt[3]{a}\right)^m=a^{\frac{m}{3}}=b$

조건 (나)에서 $\left(\sqrt{b}\right)^n=b^{\frac{n}{2}}=c$

조건 (다)에서 $c^4=a^{12}$

$c^4=\left(b^{\frac{n}{2}}\right)^4=\left(a^{\frac{m}{3}}\right)^{2n}=a^{\frac{2mn}{3}}=a^{12}$

$\frac{2mn}{3}=12,\ mn=18$

조건을 만족시키는 순서쌍 (m,n)은 $(2,9),\ (3,6),\ (6,3),\ (9,2)$이므로 모든 순서쌍 (m,n)의 개수는 4이다.

19. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 추론하기

규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한 후 '(ⅰ) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우'에서 '(ⅱ) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우'를 제외하면 된다.

첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모두 신청하는 경우의 수는 $3!$이다.

(ⅰ)의 경우:

봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회

신청하는 경우의 수는 $\boxed{\dfrac{9!}{2!\times 2!\times 5!}}$ 이다.

(ⅱ)의 경우:

첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 2회

신청하는 경우의 수 $\boxed{\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}}$ 과 같다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

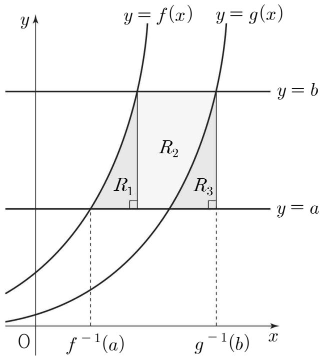
구하는 경우의 수는 $3!\times\left(\boxed{756}-\boxed{90}\right)$이다.

$p=756,\ q=90$

$p+q=756+90=846$

20. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제해결하기

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$의 그래프는 다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$S_1=S_3$

조건 (가)에서

$S_1+S_2=S_3+S_2=2\times(b-a)=6$

$b-a=3$ …… ㉠

조건 (나)에서

$f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$ (p, q는 실수)라 하면

$2^p=a$, $2^{q-2}=b$

$p=\log_2 a$, $q=\log_2 b+2=\log_2 4b$

$q-p=\log_2 4b-\log_2 a=\log_2\dfrac{4b}{a}=\log_2 6$

$3a=2b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=9$

$a+b=15$

21. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

두 점 $\mathrm{A}(\sqrt{2},0)$, $\mathrm{B}(0,\sqrt{2})$를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l의 방정식은

$x+y-\sqrt{2}=0$이고

원의 중심 O와 직선 l 사이의 거리는 1이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 원 위의 한 점 P와 직선 l 사이의 거리를 h라 하면 삼각형 ABP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\times h=h$

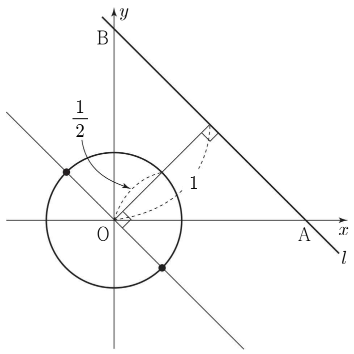
따라서 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는 h가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수와 같다.

ㄱ. $t=\dfrac{1}{2}$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우뿐이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ (참)



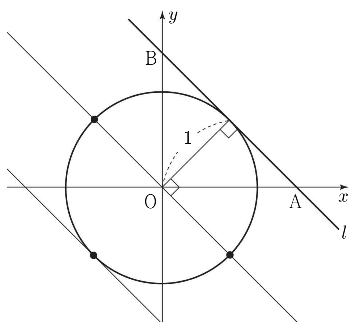
ㄴ. $t=1$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고

$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 1이므로

$f(1)=3$



$1<t<2$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 t인 원 위의 점 중 h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.

$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고

$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로

$\lim_{t\to 1+}f(t)=4$

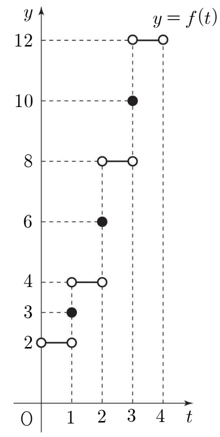
$\lim_{t\to 1+}f(t)\neq f(1)$ (참)

ㄷ. ㄴ과 같은 방법으로 구간 $(0,4)$에서

함수 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 4 & (1<t<2) \\ 6 & (t=2) \\ 8 & (2<t<3) \\ 10 & (t=3) \\ 12 & (3<t<4) \end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은 1, 2, 3이므로 a의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 중복순열 계산하기

${}_2\Pi_3=2^3=8$

23. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f'(x)=4x^3+6x+7$이므로

$f'(1)=4+6+7=17$

24. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$2a_4=a_{10}$이므로

$2(6+3d)=6+9d$

$d=2$

$a_9=6+8\times 2=22$

25. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\int(4x^3+4x+1)dx$

$\quad =x^4+2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$f(x)=x^4+2x^2+x+1$

$f(2)=16+8+2+1=27$

26. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^3|-4t+8|dt$

$$= \int_0^2 (-4t+8)dt + \int_2^3 (4t-8)dt$$
$$= \Big[-2t^2+8t\Big]_0^2 + \Big[2t^2-8t\Big]_2^3$$
$$= 8+2 = 10$$

27. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$n=1$일 때, $a_2+3a_1=-1$이므로 $a_2=-4$

$n=2$일 때, $a_3+3a_2=2$이므로 $a_3=14$

$n=3$일 때, $a_4+3a_3=-3$이므로 $a_4=-45$

$n=4$일 때, $a_5+3a_4=4$이므로 $a_5=139$

28. [출제의도] 미분가능성을 활용하여 문제해결하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능하다.
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3-} g(x) = \lim_{x\to 3+} g(x) = g(3)$$

$b-f(3)=f(3)$

$b=6a-34$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} &= \lim_{x\to 3-}\frac{b-f(x)-f(3)}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3-}\frac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3-}\frac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}\\ &= -f'(3)\\ &= a-9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3} &= \lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\\ &= f'(3)\\ &= -a+9\end{aligned}$$

따라서 $a=9$, $b=20$

$$g(x)=\begin{cases} -x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\ge 3)\end{cases}$$

$x<3$에서

$g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

$x\ge 3$에서

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

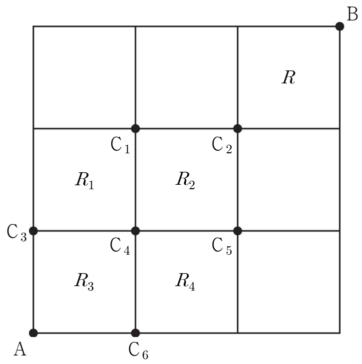
$g'(x)=0$에서 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

$g(1)=-1+6-9+10=6$이므로
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다.

29. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이
6개의 점 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6과
4개의 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4가 있다.
최단거리로 A 지점에서 출발하여 B 지점을 지나
다시 A 지점까지 돌아올 때, 조건 (가)를
만족시키려면
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_2\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}_2\to\mathrm{A}$의 순서로 이동해야 한다.
또한 조건 (나)를 만족시키려면
정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는
정사각형은 없어야 한다.

(i) $\mathrm{C}_2\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}_2$의 순서로 이동하는 경우
(C_2에서 B로 가는 경우의 수)
$\times$(B에서 C_2로 가는 경우의 수)$=2\times1=2$

(ii) $\mathrm{A}\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{A}$의 순서로 이동하는 경우
$$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$$

(a) 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_3\to\mathrm{C}_1\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_1\to\mathrm{C}_3\to\mathrm{A}$의
순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(b) 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{A}$의 순서로
이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(1\times2)=8$

(c) 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{A}$의 순서로
이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(2\times1)=8$

(d) 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_6\to\mathrm{C}_5\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_5\to\mathrm{C}_6\to\mathrm{A}$의
순서로 이동하는 경우의 수이므로
$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(e) 두 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는
경우
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}_4\to\mathrm{A}$의 순서로
이동하는 경우의 수이므로
$(2\times2)\times(1\times1)=4$

(a)~(e)에 의하여
$\mathrm{A}\to\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_2\to\mathrm{A}$의 순서로 이동할 때, 한 변의
길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는
정사각형이 없는 경우의 수는
$36-\{(2+8+8+2)-4\}=20$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$2\times20=40$

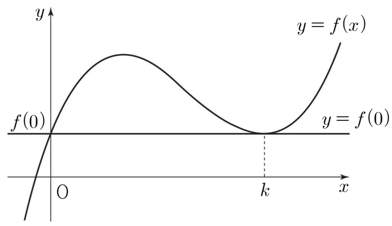
30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

조건 (가)에서
$g(k)=0$인 양수 k가 존재한다.

$$g(k)=\frac{f(k)-f(0)}{k}=0$$

$f(k)=f(0)$

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의
그래프는 점 $(k,\ f(k))$에서 직선 $y=f(0)$과 접한다.



$f(x)=x(x-k)^2+f(0)$

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-k)^2+2x(x-k)\\ &=(3x-k)(x-k)\ \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{t(t-k)^2}{t}=(t-k)^2$$

조건 (나)에서 $f'(a)=g(a)$

$(3a-k)(a-k)=(a-k)^2$

$2a(a-k)=0$

$a>0$이므로 $a=k$

㉠에서 $f'(k)=0$이므로

$g(a)=0\ \cdots\cdots ㉡$

조건 (나)에서 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=g(a)$이고

㉡에서 $g(a)=0$이므로 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$

㉠에서 $f'(x)=0$에서

$x=\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$이므로

$\dfrac{k}{3}=\dfrac{5}{3}$ 또는 $k=\dfrac{5}{3}$

조건 (나)에서 $a>\dfrac{5}{3}$이므로 $k>\dfrac{5}{3}$

따라서 $k=5$

$f'(x)=(3x-5)(x-5)$

$g(t)=(t-5)^2$

이차방정식 $f'(x)=g(m)$에서
$3x^2-20x-m^2+10m=0$
이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}D&=(-20)^2-4\times3\times(-m^2+10m)\\ &=12(m-5)^2+100>0\end{aligned}$$

이므로 이차방정식 $f'(x)-g(m)=0$은
m의 값에 관계없이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 c_1, c_2 $(c_1<c_2)$라 하자.
$n(A_m)=2$이려면

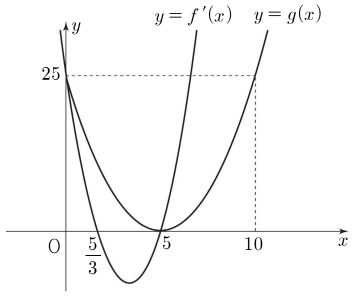
$0 < c_1 < c_2 \le m$이어야 한다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$c_1 c_2 = \frac{-m^2+10m}{3} > 0$$

$0 < m < 10$

두 함수 $y=f'(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



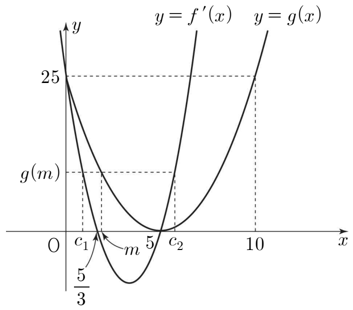
$g(m)=(m-5)^2 \ge 0$이므로

$f'(x)=g(m)$에서

$f'(x)=(3x-5)(x-5) \ge 0$

$x \le \frac{5}{3}$ 또는 $x \ge 5$

(ⅰ) $0 < m < 5$인 경우



$0 < c_1 < m < 5 < c_2$이므로

$A_m = \{c_1\}$

$n(A_m) \ne 2$

(ⅱ) $m=5$인 경우

$g(5)=0$이므로

$f'(x)=g(5)=0$

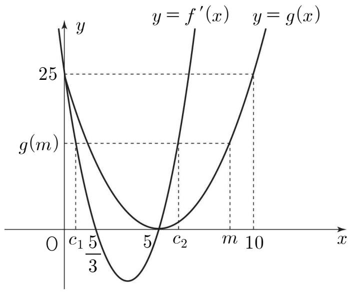
$(3x-5)(x-5)=0$

$x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=5$

$A_5 = \left\{\frac{5}{3}, 5\right\}$

$n(A_5)=2$

(ⅲ) $5 < m < 10$인 경우



$0 < c_1 < c_2 < m$이므로

$A_m = \{c_1, c_2\}$

$n(A_m)=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $n(A_m)=2$를 만족시키는 자연수 m은 5, 6, 7, 8, 9

따라서 $5+6+7+8+9=35$