• 수학 영역 •

수학 정답

1	②	2	①	3	④	4	①	5	②
6	⑤	7	⑤	8	④	9	③	10	⑤
11	④	12	③	13	③	14	①	15	②
16	10	17	6	18	9	19	162	20	8
21	15	22	16						

해 설

1. [출제의도] 로그의 값을 계산한다.

$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}\log_2 2 = \frac{4}{3}\times 1 = \frac{4}{3}$

2. [출제의도] 등차수열의 첫째항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n = a+(n-1)d$

그러므로 $a_4 = a_1 + (4-1)\times 3 = a_1 + 9$

즉, $a_1 + 9 = 100$

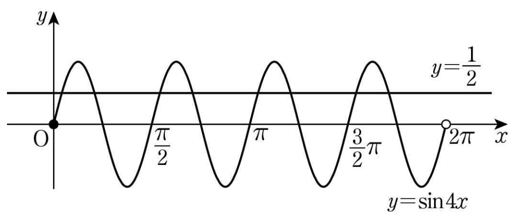
따라서 $a_1 = 91$

3. [출제의도] 삼각함수의 주기를 이해하여 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구한다.

$y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$이다.

좌표평면에 직선 $y=\frac{1}{2}$과 $0\le x<2\pi$의 범위에서

함수 $y=\sin 4x$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 8

4. [출제의도] 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_2^{-2}(x^3+3x^2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_2^{-2}$$

$$= (4-8)-(4+8)$$

$$= -16$$

5. [출제의도] 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$\lim_{x\to -2+} f(x) + \lim_{x\to 2-} f(x) = 2+3=5$

6. [출제의도] 함수의 연속에 대한 성질을 이해한다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=3$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3+} f(x) = f(3)$

$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2+ax+b}{x-3}$의 값이 존재하고, $x\to 3-$일 때

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 3-}(x^2+ax+b)=0$이므로

$9+3a+b=0$, $b=-3a-9$

$$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2+ax-3a-9}{x-3} = \lim_{x\to 3-}\frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3-}(x+3+a)$$

$$= 6+a$$

한편, $\lim_{x\to 3+} f(x) = f(3) = 7$

그러므로 $6+a=7$

따라서 $a=1$, $b=-12$이므로 $a-b=13$

7. [출제의도] Σ의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

자연수 k에 대하여

$n=2k-1$일 때, $a_n = a_{2k-1} = \frac{\{(2k-1)+1\}^2}{2} = 2k^2$

$n=2k$일 때, $a_n = a_{2k} = \frac{(2k)^2}{2} + 2k+1 = 2k^2+2k+1$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{5} a_{2k}$

$$= \sum_{k=1}^{5} 2k^2 + \sum_{k=1}^{5}(2k^2+2k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{5}\{2k^2+(2k^2+2k+1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{5}(4k^2+2k+1)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{5}k^2 + 2\sum_{k=1}^{5}k + \sum_{k=1}^{5}1$$

$$= 4\times\frac{5\times 6\times 11}{6} + 2\times\frac{5\times 6}{2} + 1\times 5$$

$$= 255$$

8. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 방정식에 대한 문제를 해결한다.

$f(x) = x^3-3x^2-9x$라 하면

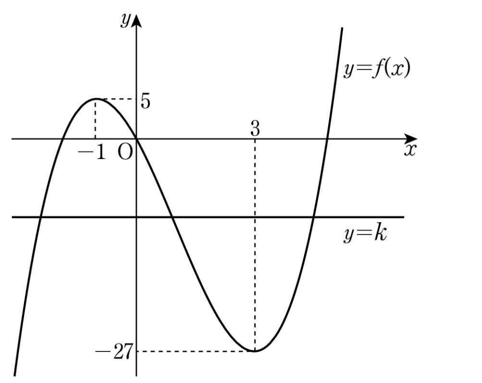
$f'(x) = 3x^2-6x-9 = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y=k$는 x축에 평행하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위는 $-27<k<5$

그러므로 정수 k의 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=-26$

따라서 $M-m = 4-(-26) = 30$

9. [출제의도] 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

구하고자 하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$$

$$= \int_0^2 \{g(x)-f(x)\}dx$$

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 3이고

삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$은 한 실근 0과 중근 2를 가지므로 $g(x)-f(x) = 3x(x-2)^2$

따라서 $S = \int_0^2 3x(x-2)^2 dx$

$$= \int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$$

$$= \left[\frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2\right]_0^2$$

$$= 12-32+24 = 4$$

10. [출제의도] 수열의 합을 구하는 과정을 추론한다.

점 $A_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{n}$이므로 직선의 방정식은

$y-n^2 = -\frac{1}{n}(x-n)$, $y = \boxed{-\frac{1}{n}}\times x + n^2 + 1$

즉, $\boxed{(가)} = -\frac{1}{n}$

점 B_n의 좌표는 $-\frac{1}{n}x+n^2+1=0$에서 $(n^3+n, 0)$

점 A_n의 좌표는 (n, n^2)이므로

$S_n = \frac{1}{2}\times(n^3+n)\times n^2 = \boxed{\frac{n^5+n^3}{2}}$

즉, $\boxed{(나)} = \frac{n^5+n^3}{2}$

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3} = \sum_{n=1}^{8}\frac{n^5+n^3}{2n^3} = \sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8}1$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{8\times 9\times 17}{6} + \frac{1}{2}\times 1\times 8$$

$$= 102+4 = \boxed{106}$$

즉, $\boxed{(다)} = 106$

따라서 $f(n) = -\frac{1}{n}$, $g(n) = \frac{n^5+n^3}{2}$, $r=106$이므로

$f(1)+g(2)+r = -1+20+106 = 125$

11. [출제의도] 부채꼴의 넓이를 이용하여 문제를 해결한다.

원 O'에서 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO'B의 넓이를 T_1, 원 O에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2라 하면,

$S_1 = T_1 + S_2 - T_2$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{7}{6}\pi\right) + S_2 - \left(\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \frac{3}{2}\pi + S_2$$

따라서 $S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi$

12. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이다. 즉, $f(1)=g(1)$ …… ㉠

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{g(x)-g(1)\}}{x-1} = 5$$

즉, $f'(1)-g'(1)=5$ …… ㉡

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)-f(1)\}+\{g(x)-g(1)\}}{x-1} = 7$$

즉, $f'(1)+g'(1)=7$ …… ㉢

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-a}{x-1} = b\times g(1)$에서 $x\to 1$일 때,

(분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $a=f(1)$이고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

㉠에서 $f(1)=g(1)$이므로 $f'(1) = b\times f(1) = ab$

㉡, ㉢을 연립해서 풀면 $f'(1)=6$

따라서 $ab=6$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

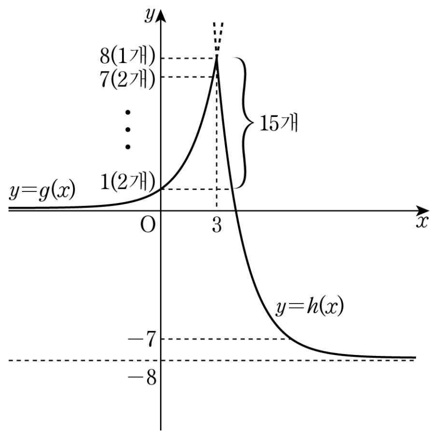
$g(x)=2^x$, $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$이라 하면

곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고,

곡선 $y=h(x)$의 점근선의 방정식은

$y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8$이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23이므로 $y \le 0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 8이다.

곡선 $y=h(x)$의 점근선이 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이므로

$-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$은 -8 이상 -7 미만이어야 한다.

즉, $-8leit-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$,

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \le 16$, $4<15<4^{-3-a} \le 4^2$,

$1<-3-a \le 2$, $-5 \le a<-4$

따라서 구하는 정수 a의 값은 -5

14. [출제의도] 미분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 $f(0)=0$이고 $g(0)=0$이므로

$g(x)=f(x)+|f'(x)|$에서 $f'(0)=0$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f'(x)=(x^2+ax+b)+x(2x+a)$에서 $f'(0)=b=0$

그러므로 $f(x)=x^2(x+a)$, $f'(x)=x(3x+2a)$

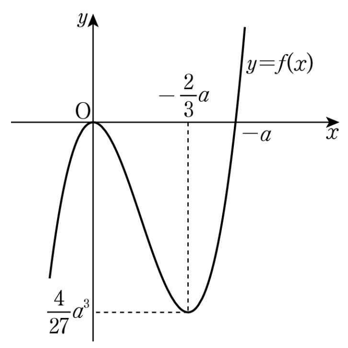
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

조건 (나)에서 $-a>0$이므로 $-\frac{2}{3}a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3$	$\nearrow$

이고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (다)에서 $\left|f\left(-\frac{2}{3}a\right)\right|=4$이므로

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3=-4$이고 $a^3=-27$에서 $a=-3$

그러므로 $f(x)=x^2(x-3)$이고

$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

따라서 $g(3)=9$

15. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 도형의 성질을 추론한다.

$\angle \mathrm{ABC}=\theta$라 하자.

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos\theta$

이므로 $\overline{\mathrm{AC}}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\frac{1}{8}=36$

그러므로 $\overline{\mathrm{AC}}=6$ (참)

ㄴ. 호 EA에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle \mathrm{ACE}=\angle \mathrm{ABE}$

호 CE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle \mathrm{EAC}=\angle \mathrm{EBC}$

한편, $\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{EBC}$이므로 $\angle \mathrm{ACE}=\angle \mathrm{EAC}$

그러므로 삼각형 EAC는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$인 이등변삼각형이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ABD에서 $\angle \mathrm{ADE}=\angle \mathrm{DAB}+\angle \mathrm{ABD}$

한편, $\angle \mathrm{DAB}=\angle \mathrm{CAD}$, $\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{EBC}$

그러므로 $\angle \mathrm{ADE}=\angle \mathrm{CAD}+\angle \mathrm{EBC}$

$=\angle \mathrm{CAD}+\angle \mathrm{EAC}$

$=\angle \mathrm{EAD}$

즉, 삼각형 EAD는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$인 이등변삼각형이다. 삼각형 EAC에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{EA}}^2+\overline{\mathrm{EC}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\cos(\pi-\theta)$이고

ㄴ에서 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$이므로

$36=2\times\overline{\mathrm{EA}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}^2\times\left(-\frac{1}{8}\right)$, $\overline{\mathrm{EA}}=4$

그러므로 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$에서 $\overline{\mathrm{ED}}=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

16. [출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 미분계수를 구한다.

곱의 미분법에 의해 함수 $f(x)g(x)$의 도함수는

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$f'(x)=4x+5$, $g'(x)=3x^2$이므로

$f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=5\times2+3\times0=10$

17. [출제의도] 로그의 진수에 미지수가 포함된 부등식을 해결한다.

이차방정식 $3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하기 위해서는

$\frac{D}{4}=(\log_2 n)^2-3\times\log_2 n<0$,

$(\log_2 n-3)\log_2 n<0$, $0<\log_2 n<3$, $1<n<8$

n은 자연수이므로 $n=2$, 3, 4, 5, 6, 7

따라서 조건을 만족하는 자연수 n의 개수는 6

18. [출제의도] 부정적분의 성질을 활용하여 문제를 해결한다.

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$$F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

그런데 $F(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $C_1=C_2$

즉, $F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_1 & (x \ge 0) \end{cases}$

그러므로 $F(2)-F(-3)=21$에서

$\left(\frac{4}{3}k+C_1\right)-(-9+C_1)=21$

따라서 $k=9$

[다른 풀이]

$F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F(2)-F(-3)=\Big[F(x)\Big]_{-3}^{2}=\int_{-3}^{2}f(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{2}f(x)dx&=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx\\&=\int_{-3}^{0}(-2x)dx+\int_{0}^{2}k(2x-x^2)dx\\&=\Big[-x^2\Big]_{-3}^{0}+k\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_{0}^{2}\\&=9+\frac{4}{3}k=21\end{aligned}$$

따라서 $k=9$

19. [출제의도] 수열의 귀납적 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.

$S_{n+1}=a_{n+1}+S_n$이므로 $a_{n+1}S_n=a_n(a_{n+1}+S_n)$,

$(S_n-a_n)a_{n+1}=a_nS_n$

즉, $S_{n-1}a_{n+1}=a_nS_n\ (n \ge 2)$ …… ㉠

$a_1=S_1=2$, $a_2=4$이므로 $S_2=a_1+a_2=6$

㉠에서 $a_{n+1}=\frac{a_nS_n}{S_{n-1}}$ …… ㉡

㉡에 $n=2$, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_3=\frac{a_2S_2}{S_1}=\frac{4\times6}{2}=12$에서 $S_3=S_2+a_3=6+12=18$

$a_4=\frac{a_3S_3}{S_2}=\frac{12\times18}{6}=36$에서 $S_4=S_3+a_4=18+36=54$

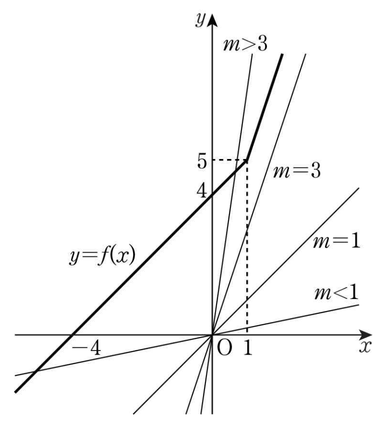
$a_5=\frac{a_4S_4}{S_3}=\frac{36\times54}{18}=108$

따라서 $S_5=S_4+a_5=162$

20. [출제의도] 함수의 연속성을 이용하여 문제를 해결한다.

직선 $y=mx$는 실수 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 3x+2 & (x \ge 1) \end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $g(m)$은

$g(m)=\begin{cases} 1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3) \\ 0 & (1 \le m \le 3) \end{cases}$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-}g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to1+}g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)h(x)=\lim_{x\to1+}g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ii) $x=3$일 때

$\lim_{x\to3-}g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to3+}g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3-}g(x)h(x)=\lim_{x\to3+}g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(i), (ii)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times2=8$

21. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{\mathrm{AC}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{BD}}=2k$이고

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HB}}=1:3$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}$

$\angle \mathrm{CAB}=\theta$라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙을 이용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2r$, $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}=2R$

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=2r\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=2R\sin\theta$

$4(R^2-r^2)\times\sin^2\theta=(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2$ 이므로

두 식을 $(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2=51$ 에 대입하면

$\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=51$ …… ㉠

삼각형 AHC 에서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\dfrac{1}{2k}$ 이므로

두 삼각형 ABC, ABD 에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$

$=4+k^2-2\times2\times k\times\cos\theta=k^2+2$ …… ㉡

$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos(\pi-\theta)$

$=4+4k^2+2\times2\times2k\times\cos\theta=4k^2+8$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{BC}}^2=3k^2+6=51$

즉, $k^2=15$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}^2=15$

22. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수가 포함된 문제를 해결한다.

$g'(x)=(x^2-4)\{|f(x)|-a\}$ 에서 $x=-2$, $x=2$ 가 방정식 $g'(x)=0$ 의 근이지만 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않아야 하므로 $x=-2$ 와 $x=2$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 변하지 않아야 하고,

$\lim\limits_{x\to\infty}\{|f(x)|-a\}=\lim\limits_{x\to-\infty}\{|f(x)|-a\}=\infty$ 이므로 $g'(x)$, x^2-4, $|f(x)|-a$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert f(x)\rvert-a$	$+$	0	$-$	0	$+$

함수 $|f(x)|-a$ 는 연속함수이므로 사잇값의 정리에 의해 $|f(-2)|-a=0$, $|f(2)|-a=0$

두 실수 m, n 에 대하여 일차함수 $f(x)=mx+n$ 이라 하면 $m\neq0$ 이고, $|2m+n|=|-2m+n|=a$ 가 성립한다.

(i) $2m+n=-2m+n$ 인 경우

$m=0$ 이 되어 모순이다.

(ii) $2m+n=-(-2m+n)$ 인 경우

$n=0$ 이고 $|m|=\dfrac{a}{2}$ 이다.

(i), (ii)에서 $|f(x)|=|mx|=\dfrac{a}{2}|x|$

$g(2)=\displaystyle\int_0^2(t^2-4)\{|f(t)|-a\}dt$

$=\displaystyle\int_0^2(t^2-4)\left(\frac{a}{2}|t|-a\right)dt$

닫힌구간 $[0,2]$ 에서 $|t|=t$ 이므로

$g(2)=\dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^2(t^2-4)(t-2)dt$

$=\dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^2(t^3-2t^2-4t+8)dt$

$=\dfrac{a}{2}\left[\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{2}{3}t^3-2t^2+8t\right]_0^2$

$=\dfrac{a}{2}\times\left(4-\dfrac{16}{3}-8+16\right)=\dfrac{10}{3}a$

조건 (나)에서 $g(2)=5$ 이므로 $\dfrac{10}{3}a=5$, $a=\dfrac{3}{2}$

$g(0)=\displaystyle\int_0^0(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt=0$ 이고

닫힌구간 $[-4,0]$ 에서 $|t|=-t$ 이므로

$g(-4)=\displaystyle\int_0^{-4}(t^2-4)\left(\frac{3}{4}|t|-\frac{3}{2}\right)dt$

$=\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^{-4}(t^2-4)(-t-2)dt$

$=\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^{-4}(-t^3-2t^2+4t+8)dt=-16$

따라서 $g(0)-g(-4)=0-(-16)=16$

[확률과 통계]

23	③	24	④	25	②	26	①	27	⑤
28	③	29	55	30	97				

23. [출제의도] 중복조합의 값을 계산한다.

${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!\times1!}=3$ 이다.

P 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 2개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\dfrac{4!}{2!\times2!}=6$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times6=18$

25. [출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

같은 학급의 대표 2명을 한 사람으로 보고 4명을 배열하는 원순열의 수는 $(4-1)!=6$ 이다.

각 학급 대표 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 $2^4=16$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times16=96$

26. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

세 명의 학생에게 연필을 하나씩 나누어 주고 남은 3자루의 연필을 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

5개의 지우개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times21=210$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$ 이다.

□에 숫자 3, 4를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2를 각각 나열할 수 있다고 하자.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

이 각각의 경우에 대하여 숫자 1, 2가 적힌 2장의 카드를 두 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하려면 ∨ 6곳 중 서로 다른 두 곳에 배열하는 경우의 수에서 연속으로 ∨ 두 곳에 배열하는 경우의 수를 빼면 되므로 이 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_2-5\times2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times20=200$

28. [출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결한다.

(i) $f(3)=4$ 또는 $f(3)=10$ 인 경우

$f(3)=4$ 이면 $f(2)=f(5)=2$ 이고,

$f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$f(3)=10$ 이면 $f(1)=f(4)=12$ 이고,

$f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_4\Pi_2=32$

(ii) $f(3)=6$ 또는 $f(3)=8$ 인 경우

$f(3)=6$ 이면 $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$f(3)=8$ 이면 $f(1)$ 과 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(2)$ 와 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_2\Pi_2\times{}_3\Pi_2=72$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는

$32+72=104$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 문제를 해결한다.

c가 5 이하의 자연수이므로 $1\le b\le4$ 이다.

(i) $b=1$ 인 경우

$a\le2\le c\le d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_2$ 이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{H}_2={}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=2\times10=20$

(ii) $b=2$ 인 경우

$a\le3\le c\le d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2$ 이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=3\times6=18$

(iii) $b=3$ 인 경우

$a\le4\le c\le d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2$ 이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2=4\times3=12$

(iv) $b=4$ 인 경우

$a\le5\le c\le d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는 1 이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1\times1=5$

(i) ~ (iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$20+18+12+5=55$

30. [출제의도] 중복순열을 이용하여 문제를 해결한다.

(i) 1, 2, 3 에서만 선택한 후 나열하는 경우

1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우에서 2, 3 중에서만 선택하여 나열하는 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4-{}_2\Pi_4=3^4-2^4=65$

(ii) 1, 4, □, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우

1과 4의 위치를 정하는 경우의 수는

$2\times({}_4\mathrm{C}_2-3)=6$ 이고, □에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는 $2^2=4$ 이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times4=24$

(iii) 1, 1, 4, □ 또는 1, 4, 4, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우

1, 1, 4를 나열하는 경우는 11□4, 4□11 이고, □에 2 또는 3을 나열할 수 있으므로 경우의 수는 $2\times2=4$ 이다.

1, 4, 4, □인 경우는 1, 1, 4, □인 경우와 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는 4이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $4+4=8$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$65+24+8=97$

[미적분]

23	⑤	24	①	25	④	26	②	27	③
28	③	29	12	30	5				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=5$$

24. [출제의도] 등비수열의 수렴 조건을 이해한다.

수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-4x}{5}\le 1$에서

$$\begin{cases}x^2-4x+5>0\\ x^2-4x-5\le 0\end{cases}$$

$x^2-4x+5>0$에서 $(x-2)^2+1>0$이므로 모든 정수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

$x^2-4x-5\le 0$에서

$(x+1)(x-5)\le 0$, $-1\le x\le 5$

따라서 모든 정수 x의 개수는 7이다.

25. [출제의도] 등비수열이 포함된 수열의 극한값을 구한다.

$a_{n+1}=a_1a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 a_1 인 등비수열이다.

그러므로 $a_n=a_1^{\,n}\ (a_1>0)$

(i) $0<a_1<1$ 인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=-5\ne 12$$

(ii) $a_1=1$ 인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=-\frac{2}{3}\ne 12$$

(iii) $a_1>1$ 인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_1^{\,3}-\frac{5}{a_n}}{2+\frac{1}{a_n}}=\frac{3}{2}a_1^{\,3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$\frac{3}{2}a_1^{\,3}=12$, $a_1^{\,3}=8$

따라서 $a_1=2$

26. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해한다.

$2n^2-3<a_n<2n^2+4$ 에서

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3)<S_n<\sum_{k=1}^{n}(2k^2+4)$$

이때

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3)=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3n=\frac{n(2n^2+3n-8)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+4)=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4n=\frac{n(2n^2+3n+13)}{3}$$

$$\frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3}<\frac{S_n}{n^3}<\frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3}=\frac{2}{3}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=\frac{2}{3}$$

27. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해한다.

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=\frac{3}{(n+2)!}$ 이므로

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{0!}=\frac{3}{3!}$ 에서 $a_1=\frac{1}{2}$

$n\ge 2$일 때,

$$\frac{a_n}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{(k-1)!}=\frac{3}{(n+2)!}-\frac{3}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{3(n-1)!}{(n+2)!}-\frac{3(n-1)!}{(n+1)!}\\&=\frac{3}{(n+2)(n+1)n}-\frac{3}{(n+1)n}\\&=\frac{-3n-3}{(n+2)(n+1)n}\\&=\frac{-3}{n(n+2)}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{3n}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

28. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=4+n^2$

$\overline{BC}=\sqrt{n^2+4}$

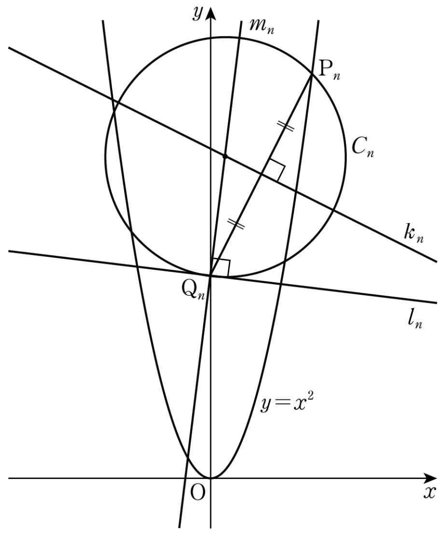
선분 AD가 ∠A의 이등분선이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=2:n$

즉 $a_n=\overline{CD}=\frac{n}{n+2}\times\overline{BC}=\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(n-a_n)&=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n+2-\sqrt{n^2+4}\right)}{n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+2}\times\frac{(n+2)^2-(n^2+4)}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\times\frac{4n}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\times\frac{4}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}\right)\\&=2\end{aligned}$$

29. [출제의도] 접선의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.



점 Q_n을 지나고 직선 l_n에 수직인 직선을 m_n이라 하면 원 C_n의 중심은 직선 m_n 위에 존재한다. 직선 m_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P_n에서의 접선과 평행하고 $y'=2x$이므로 직선 m_n의 기울기는 $4n$이다. 직선 m_n이 점 Q_n을 지나므로 직선 m_n의 방정식은

$y=4nx+2n^2$

선분 P_nQ_n의 수직이등분선을 k_n이라 하면 원 C_n의 중심은 직선 k_n 위에 존재한다.

직선 P_nQ_n의 기울기는 n, 선분 P_nQ_n의 중점의 좌표는 $(n,3n^2)$이므로 직선 k_n의 방정식은

$y=-\frac{1}{n}(x-n)+3n^2$

$y=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$

원 C_n의 중심은 두 직선 m_n, k_n의 교점이므로 원 C_n의 중심의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

$4nx_n+2n^2=-\frac{1}{n}x_n+3n^2+1$ 에서

$\left(4n+\frac{1}{n}\right)x_n=n^2+1$

$x_n=\frac{n^3+n}{4n^2+1}$

$y_n=4n\times\frac{n^3+n}{4n^2+1}+2n^2=\frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$

원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심을 지나야 하므로

$a_n=\frac{y_n}{x_n}=\frac{12n^4+6n^2}{n^3+n}=\frac{12n^3+6n}{n^2+1}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+6}{n^2+1}=12$$

30. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$$\begin{aligned}f(x)&=x(x-n)(x-3n^2)\\&=x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x\end{aligned}$$

$f'(x)=3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$

$f'(x)=0$ 에서

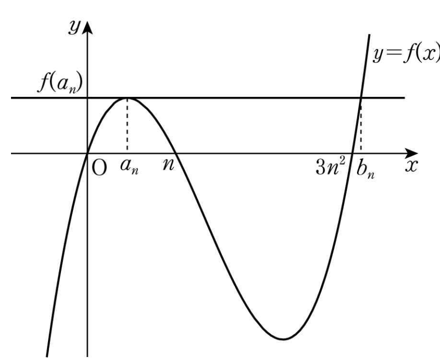
$x=\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

또는 $x=\frac{3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $x=\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

즉 $a_n=\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^2-(9n^2-3n+1)}{3\left(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{3+\frac{1}{n}+\sqrt{9-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$



방정식 $f(x)-f(a_n)=0$은 $x=a_n$을 중근으로 가지고, a_n이 아닌 근이 b_n이므로

$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $f(a_n)=a_n^2b_n$에서

$a_n^2b_n=a_n^3-(3n^2+n)a_n^2+3n^3a_n$

양변을 n^3a_n으로 나누면

$\frac{a_n b_n}{n^3} = \frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times\left(\frac{a_n}{n}\right)^2-\frac{3n^2+n}{n^2}\times\frac{a_n}{n}+3\right\}$$
$$=0-3\times\frac{1}{2}+3=\frac{3}{2}$$

$p=2,\ q=3$이므로

$p+q=5$

[기하]

23	③	24	①	25	②	26	④	27	③
28	⑤	29	12	30	15				

23. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 초점을 구한다.

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점의 좌표는

$(4,0),\ (-4,0)$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}}=8$

24. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해한다.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하자. 주축의 길이가 8이므로 $2a=8$에서

$a=4$

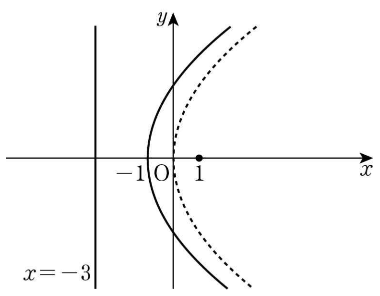
한 점근선의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$에서

$b=3$

$c^2=a^2+b^2=4^2+3^2=25$

$c>0$이므로 $c=5$

25. [출제의도] 포물선의 방정식을 이해한다.



꼭짓점이 점 $(-1,0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인 포물선의 초점은 $(1,0)$이므로 구하는 포물선은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 구하는 포물선의 방정식은

$y^2=8(x+1)$, 즉 $y^2=8x+8$

$a=8,\ b=8$이므로

$a+b=16$

26. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′의 좌표를 각각 $(c,0),\ (-c,0)(c>0)$이라 하면

$c^2=9+16=25$

에서 $c=5$이므로 $\mathrm{F}(5,0),\ \mathrm{F'}(-5,0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=6$ …… ㉠

삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 24이므로

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}=24$

이고 $\overline{\mathrm{FF'}}=10$이므로

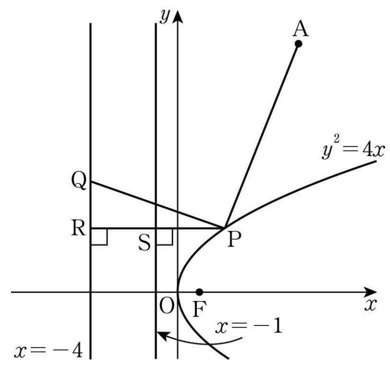
$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=14$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{AF}}=4,\ \overline{\mathrm{AF'}}=10$이므로 삼각형 AF′F는 이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 AF′F의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{10^2-2^2}=8\sqrt{6}$

27. [출제의도] 포물선의 초점과 준선의 성질을 이해한다.



포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,0)$이다. 점 P에서 직선 $x=-4$와 포물선의 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 R, S라 하면

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PS}}+\overline{\mathrm{SR}}=\overline{\mathrm{PS}}+3$

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PS}}=\overline{\mathrm{PF}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}\ge\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PR}}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PS}}+3$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}+3$

$\ge\overline{\mathrm{AF}}+3$

$=\sqrt{5^2+12^2}+3$

$=16$

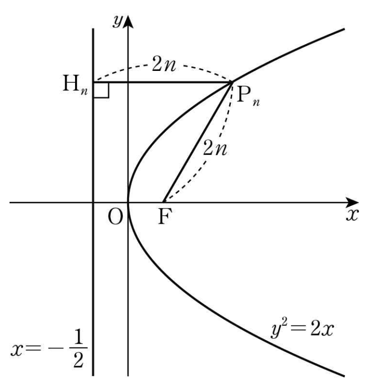
따라서 점 P는 선분 AF와 포물선 $y^2=4x$가 만나는 점이고, 이 교점에서 직선 $x=-4$에 내린 수선의 발이 Q일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$는 최솟값 16을 가진다.

28. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.

포물선 $y^2=2x$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},0\right)$이고

준선은 직선 $x=-\frac{1}{2}$이다.

점 P_n에서 직선 $x=-\frac{1}{2}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\overline{\mathrm{FP}_n}=2n$

이므로 점 P_n의 x좌표는 $2n-\frac{1}{2}$이다.

$y^2=2\left(2n-\frac{1}{2}\right)=4n-1$

에서 점 P_n의 y좌표는 $\sqrt{4n-1}$이다.

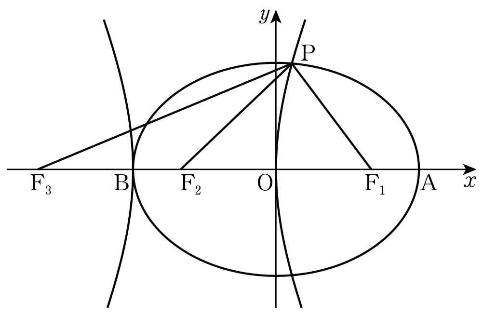
따라서 점 P_n의 좌표는 $\left(2n-\frac{1}{2},\ \sqrt{4n-1}\right)$이고

$$\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{\left(2n-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{4n-1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(4n^2-2n+\frac{1}{4}\right)+(4n-1)}$$
$$=\sqrt{4n^2+2n-\frac{3}{4}}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{8}\overline{\mathrm{OP}_n}^2=\sum_{n=1}^{8}\left(4n^2+2n-\frac{3}{4}\right)$$
$$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}+2\times\frac{8\times9}{2}-8\times\frac{3}{4}$$
$$=882$$

29. [출제의도] 타원과 쌍곡선의 정의를 이용하여 문제를 해결한다.



점 P에서 타원의 두 초점 F_1, F_2까지의 거리의 합은 장축인 선분 AB의 길이와 같다.

즉 $\overline{\mathrm{PF}_2}+\overline{\mathrm{PF}_1}=6$ …… ㉠

점 P에서 쌍곡선의 두 초점 F_1, F_3까지의 거리의 차는 주축인 선분 BO의 길이와 같다.

즉 $\overline{\mathrm{PF}_3}-\overline{\mathrm{PF}_1}=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 더하면

$\overline{\mathrm{PF}_2}+\overline{\mathrm{PF}_3}=9$

쌍곡선의 두 초점이 F_3, F_1이므로

$\overline{\mathrm{F}_3\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{OF}_1}=c$

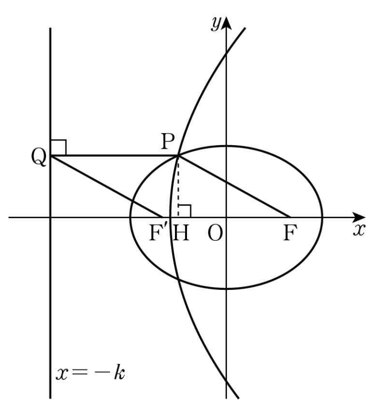
$\overline{\mathrm{BF}_2}=\overline{\mathrm{BO}}-\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{O}}=3-c$

그러므로 $\overline{\mathrm{F}_3\mathrm{F}_2}=\overline{\mathrm{F}_3\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{BF}_2}=3$

따라서 삼각형 $\mathrm{PF}_3\mathrm{F}_2$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}_2}+\overline{\mathrm{PF}_3}+\overline{\mathrm{F}_3\mathrm{F}_2}=12$

30. [출제의도] 포물선과 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



점 F가 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이다.

조건 (나)의 $\overline{\mathrm{FP}}-\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{FF'}}$에서

$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{FF'}}$

두 직선 FF′, PQ가 서로 평행하므로

두 삼각형 PQF, F′FQ에서

$\angle\mathrm{PQF}=\angle\mathrm{F'FQ}$

두 삼각형 PQF, F′FQ는 모두 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{QFP}=\angle\mathrm{PQF}=\angle\mathrm{F'FQ}=\angle\mathrm{F'QF}$

이고, 선분 FQ는 공통이므로

두 삼각형 PQF, F′FQ는 서로 합동이다.

즉 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{FF'}}$

장축의 길이가 12이고 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FF'}}=2c$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=12-2c$

삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의하여

$(12-2c)^2=(2c)^2+(2c)^2-2\times(2c)^2\times\cos(\angle\mathrm{F'FP})$

$c^2-16c+48=0$

$(c-4)(c-12)=0$

장축의 길이가 12이므로 $c<6$에서 $c=4$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{FP}}=8$에서

$\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{FP}}\times\cos(\angle\mathrm{F'FP})=7$

$\overline{\mathrm{FH}}=7$에서 점 H의 x좌표는 $4-7=-3$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FP}}=8$에서 점 H의 x좌표는 $-k+8$이므로

$-3=-k+8$, 즉 $k=11$

따라서 $c+k=15$