2021학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	②	**2**	①	**3**	⑤	**4**	④	**5**	③
6	④	**7**	⑤	**8**	①	**9**	②	**10**	③
11	③	**12**	④	**13**	②	**14**	⑤	**15**	③
16	2	**17**	40	**18**	8	**19**	16	**20**	7
21	5	**22**	251						

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\left(\sqrt{3^{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}}=\left\{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}}=3$

2. [출제의도] 등차수열 이해하기

$a_5-a_2=3\times2=6$

3. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$0<\dfrac{1}{3}<1$이므로 함수 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}+1$은

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

따라서 닫힌구간 $[0,4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(0)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+1=10$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)=3+1=4$

5. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=2x+4$에서

$f(x)=\displaystyle\int(2x+4)dx$

$\quad=x^2+4x+C$ (C는 적분상수)

$f(-1)+f(1)=0$에서

$(-3+C)+(5+C)=2C+2=0$

$C=-1$이므로 $f(x)=x^2+4x-1$

따라서 $f(2)=11$

6. [출제의도] 삼각함수 이해하기

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\sin\left(ax+\dfrac{\pi}{6}\right)$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{a}$이므로 $\dfrac{2\pi}{a}=4\pi$에서 $a=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(\pi)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. [출제의도] 미분계수 이해하기

함수 $f(x)=x^3-3x$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{(64-12)-(1-3)}{3}=18$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,f(k))$에서의 접선의 기울기는 $f'(k)=3k^2-3$이므로

$3k^2-3=18$, $k^2=7$

$k>0$이므로 $k=\sqrt{7}$

8. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)$

$f(2)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=b-4$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^2+3x+a}{x-2}=b-4$

$\lim\limits_{x\to2-}(x-2)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to2-}(x^2+3x+a)=0$

$a+10=0$에서 $a=-10$

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{(x-2)(x+5)}{x-2}=7$이므로

$b-4=7$, $b=11$

따라서 $a+b=-10+11=1$

9. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$h(x)=2f(x)-3g(x)$라 하면 $f(x)=\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left\{\frac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}+g(x)}{3\left\{\frac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+4\times\frac{h(x)}{g(x)}}{7+3\times\frac{h(x)}{g(x)}}$$

$$=2$$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=1$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

$\displaystyle\int_1^k v(t)dt=\int_1^k(4t-10)dt$

$=\left[2t^2-10t\right]_1^k$

$=(2k^2-10k)-(2-10)$

$=2k^2-10k+8$

$=2(k-1)(k-4)=0$

따라서 $k=4$

11. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$2\cos^2x-\sin(\pi+x)-2=2(1-\sin^2x)+\sin x-2$

$=-2\sin^2x+\sin x$

$=-\sin x(2\sin x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0<x<2\pi$이므로

$\sin x=0$에서 $x=\pi$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$에서 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$

따라서 모든 해의 합은 2π이다.

12. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

$f(x)=x^3-6x^2+9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$\quad=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$	↘	a

닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(1)=a+4$이므로 $a+4=12$에서 $a=8$

13. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_a^b|f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$

$\displaystyle=-\left(\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\right)$

$=-\left(-\dfrac{8}{3}-\dfrac{11}{6}\right)$

$=\dfrac{9}{2}$

14. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 추론하기

점 $\mathrm{A}(a,b)$에 대하여 점 $\mathrm{B}(c,d)$가

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$를 만족시키려면

$c=a-b$, $d=a+b$이어야 한다.

이때, $a>b$이고 d가 n 이하의 자연수이므로

$b<\dfrac{n}{2}$이다.

$\dfrac{n}{2}$ 미만의 자연수 k에 대하여

$b=k$일 때, $a+b\le n$을 만족시키는 자연수 a의 개수는 $n-2k$이다.

2 이상의 자연수 m에 대하여

(ⅰ) $n=2m$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는

1부터 $\boxed{m-1}$까지이므로

$T_{2m}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\boxed{m-1}}(2m-2k)$

$=2m(m-1)-m(m-1)$

$=\boxed{m^2-m}$

(ⅱ) $n=2m+1$인 경우

b가 될 수 있는 자연수는 1부터 m까지이므로

$T_{2m+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2m+1-2k)$

$=m(2m+1)-m(m+1)$

$=\boxed{m^2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\displaystyle\sum_{n=4}^{20}T_n=614$

따라서 $f(m)=m-1$, $g(m)=m^2-m$, $h(m)=m^2$

이므로 $f(5)+g(6)+h(7)=4+30+49=83$

15. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

ㄱ. $\log_2|kx_1|=\log_2(x_1+4)$에서 $x_1<0$이므로

$-kx_1=x_1+4$, $x_1=\dfrac{-4}{k+1}$

$\log_2|kx_2|=\log_2(x_2+4)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=x_2+4$, $x_2=\dfrac{4}{k-1}$

$x_2=-2x_1$에서

$\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{8}{k+1}$, $k+1=2k-2$, $k=3$ (참)

ㄴ. $\log_2|kx_2|=\log_2(-x_2+m)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=-x_2+m$,

$m=(k+1)x_2=\dfrac{4(k+1)}{k-1}$

$\log_2|kx_3|=\log_2(-x_3+m)$에서 $x_3<0$이므로

$-kx_3=-x_3+m$,

$x_3=\dfrac{-m}{k-1}=\dfrac{-4(k+1)}{(k-1)^2}$

그러므로

$x_1x_3=\dfrac{-4}{k+1}\times\dfrac{-4(k+1)}{(k-1)^2}=\left(\dfrac{4}{k-1}\right)^2={x_2}^2$ (참)

ㄷ. ${x_2}^2=x_1x_3$에서 $\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_3}{x_2}$

$\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{-k-1}{k-1}=-1-\dfrac{2}{k-1}<-1$

$\dfrac{x_2}{x_1}=r\,(r<-1)$이라 하면 $x_2=x_1r$, $x_3=x_1r^2$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면

두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$$
$$=\frac{\log_2|kx_2|-\log_2|kx_1|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2|kx_3|-\log_2|kx_1|}{x_1(r^2-1)}$$
$$=\frac{\log_2\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2\left|\frac{x_3}{x_1}\right|}{x_1(r^2-1)}$$
$$=\frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)}+\frac{2\log_2(-r)}{x_1(r^2-1)}=0$$

에서 $1+\dfrac{2}{r+1}=0$, $r=-3$

$x_2=x_1r$에서

$\dfrac{4}{k-1}=\dfrac{12}{k+1}$, $k+1=3k-3$, $k=2$이고,

$m=\dfrac{4(k+1)}{k-1}=12$이므로 $m+k^2=16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

16. [출제의도] 도함수 이해하기

$f(x)=x^2+ax$에서 $f'(x)=2x+a$

$f'(1)=2+a=4$에서 $a=2$

17. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{7}{18}=\dfrac{16}{9}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{4}{3}$

따라서 $30(\sin\theta+\cos\theta)=40$

18. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

다항함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극솟값 2를 가지므로

$f(3)=2$, $f'(3)=0$

$g(x)=(x^2-2x)f(x)$에서

$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$이므로

$g'(3)=4f(3)+3f'(3)=8$

19. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$a_3+a_5=\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_5}$에서

$a_3+a_5=\dfrac{a_3+a_5}{a_3a_5}$, $a_3a_5=1$이므로

$\dfrac{1}{4}r^2\times\dfrac{1}{4}r^4=1$, $r^6=16$, $r^3=4$

따라서 $a_{10}=\dfrac{1}{4}r^9=\dfrac{1}{4}(r^3)^3=16$

20. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$에서

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이를

각각 k, $2k$, $\sqrt{2}k\,(k>0)$이라 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$2k^2=k^2+4k^2-4k^2\cos(\angle ABC)$

$4k^2\cos(\angle ABC)=3k^2$

$\cos(\angle ABC)=\dfrac{3}{4}$이므로

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π이므로

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{7}$이다.

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{CA}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$이므로 선분 CA의 길이는 7이다.

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

(ⅰ) $a_1=1$일 때

$a_1\ge0$이므로 $a_2=a_1-2=-1$

$a_2<0$이므로 $a_3=a_2+5=4$

$a_3\ge0$이므로 $a_4=a_3-2=2$

$a_4\ge0$이므로 $a_5=a_4-2=0$

$a_5\ge0$이므로 $a_6=a_5-2=-2$

$a_6<0$이므로 $a_7=a_6+5=3$

$a_7\ge0$이므로 $a_8=a_7-2=1=a_1$

$a_8\ge0$이므로 $a_9=a_8-2=-1=a_2$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+7}=a_n$을 만족시키고 $a_{15}=a_8=a_1=1$

(ⅱ) $a_1=2$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=2$

(ⅲ) $a_1=3$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=3$

(ⅳ) $a_1=4$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=4$

(ⅴ) $a_1=5$일 때

$a_1\ge0$이므로 $a_2=a_1-2=3$

$a_2\ge0$이므로 $a_3=a_2-2=1$

$a_3\ge0$이므로 $a_4=a_3-2=-1$

$a_4<0$이므로 $a_5=a_4+5=4$

$a_5\ge0$이므로 $a_6=a_5-2=2$

$a_6\ge0$이므로 $a_7=a_6-2=0$

$a_7\ge0$이므로 $a_8=a_7-2=-2$

$a_8<0$이므로 $a_9=a_8+5=3=a_2$

$a_9\ge0$이므로 $a_{10}=a_9-2=1=a_3$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=-2<0$

따라서 $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

22. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

$f(x)=3x+a$이므로

$$g(x)=\int_2^x(t+a)(3t+a)\,dt$$
$$=\int_2^x(3t^2+4at+a^2)\,dt$$
$$=\Big[t^3+2at^2+a^2t\Big]_2^x$$
$$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$$

$g(2)=0$이므로

$g(x)=(x-2)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

$h(x)=(x-2)(3x+a)\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

조건 (가)에 의해 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이므로

$h(k)=h'(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 존재한다.

그러므로 다항식 $h(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 가진다.

(ⅰ) $k=2$인 경우

다항식 $h(x)$가 $(x-2)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $3x+a$가 $3(x-2)$이거나

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를 인수로 가진다.

(a) $3x+a=3(x-2)$인 경우

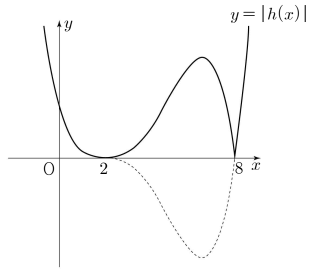
$a=-6$이므로

$h(x)=(x-2)(3x-6)(x^2-10x+16)$

$\quad=3(x-2)^3(x-8)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=729$이다.

(b) 다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x-2$를 인수로 갖는 경우

$4+4(a+1)+(a+2)^2$

$=a^2+8a+12$

$=(a+2)(a+6)=0$

에서 $a=-2$ 또는 $a=-6$

$a=-6$이면 (a)와 같다.

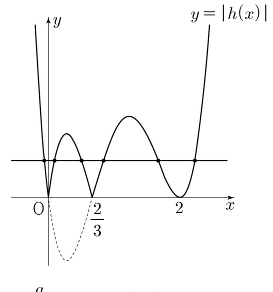
$a=-2$이면

$h(x)=(x-2)(3x-2)(x^2-2x)$

$\quad=x(3x-2)(x-2)^2$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로

함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅱ) $k=-\dfrac{a}{3}\,(a\ne-6)$인 경우

다항식 $h(x)$가 $\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2$을 인수로 가지므로

다항식 $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$이 $x+\dfrac{a}{3}$를 인수로 가진다.

2021학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

$\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}a(a+1)+(a+2)^2$

$=\frac{4}{9}a^2+\frac{10}{3}a+4$

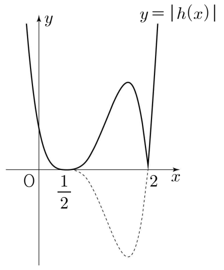
$=\frac{2}{9}(2a+3)(a+6)=0$

에서 $a=-\frac{3}{2}$이므로

$h(x)=(x-2)\left(3x-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)$

$\quad=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)$

곡선 $y=|h(x)|$는 그림과 같으므로
함수 $h(x)$는 조건 (나)를 만족시킨다.



이 경우 $h(-1)=\frac{243}{8}$

(iii) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$인 경우
$x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=x^2-2kx+k^2$에서
$a+1=-k$, $(a+2)^2=k^2$
$(a+2)^2=(-a-1)^2$에서 $a=-\frac{3}{2}$
$a=-\frac{3}{2}$이면 (ii)와 같다.

따라서 $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{243}{8}$이므로
$p=8$, $q=243$에서 $p+q=251$

[확률과 통계]

23	⑤	**24**	②	**25**	①	**26**	④	**27**	③
28	⑤	**29**	288	**30**	206				

23. [출제의도] 중복순열 계산하기

${}_n\Pi_2=n^2=25$에서 $n=5$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

다항식 $(x+2a)^5$의 전개식에서 일반항은
${}_5C_r(2a)^r x^{5-r}={}_5C_r 2^r a^r x^{5-r}$
x^3의 계수는 $r=2$일 때이므로
${}_5C_2\times 2^2\times a^2=40a^2=640$
따라서 $a=4$

25. [출제의도] 중복조합 이해하기

빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$
파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_2={}_5C_2=10$
따라서 구하는 경우의 수는 $56\times 10=560$

26. [출제의도] 중복순열 이해하기

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로 만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3=5^3=125$
일의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 3 또는 5이므로 일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 3
따라서 구하는 경우의 수는 $2\times 125\times 3=750$

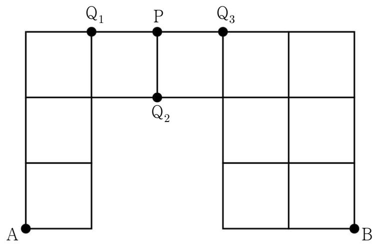
27. [출제의도] 이항계수의 성질을 이용하여 추론하기

${}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n}=2^{2n}$

이므로 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}{}_{2n+1}C_{2k}=2^{2n}-1$

$2^{2n}-1=1023$에서 $2^{2n}=2^{10}$
따라서 $n=5$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 세 지점 Q_1, Q_2, Q_3을 정하면
A지점에서 출발하여 P지점까지 가기 위해서는 Q_1지점 또는 Q_2지점 중 한 지점을 지나야 하고
P지점에서 출발하여 B지점까지 가기 위해서는 Q_2지점 또는 Q_3지점 중 한 지점을 지나야 한다.
그러므로 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우와 각각의 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $A\to Q_1\to P\to Q_2\to B$의 순서로 이동하는 경우
$\frac{4!}{1!\times 3!}\times 1\times 1\times 1\times\frac{4!}{2!\times 2!}=24$

(ii) $A\to Q_1\to P\to Q_3\to B$의 순서로 이동하는 경우
$\frac{4!}{1!\times 3!}\times 1\times 1\times\frac{5!}{2!\times 3!}=40$

(iii) $A\to Q_2\to P\to Q_3\to B$의 순서로 이동하는 경우
$\frac{3!}{1!\times 2!}\times 1\times 1\times 1\times\frac{5!}{2!\times 3!}=30$

(i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는
$24+40+30=94$

29. [출제의도] 원순열을 이용하여 추론하기

남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면

(i) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우
A, B를 한 학생으로 생각하고,
D, C, E를 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는
$24\times 2!\times 2!=96$

(ii) C가 A 또는 B 중 한 명과 이웃하는 경우
D 또는 E 중 한 명과 C, A, B의
총 4명을 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, A, B를 한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로 구하는 경우의 수는
$24\times{}_2C_1\times 2!\times 2!=192$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는
$96+192=288$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

6 이하의 음이 아닌 네 정수 y_1, y_2, y_3, y_4에 대하여
$x_1=2y_1+1$, $x_2=2y_2+2$,
$x_3=2y_3+1$, $x_4=2y_4+2$라 하면
$x_1+x_2+x_3+x_4=34$에서
$(2y_1+1)+(2y_2+2)+(2y_3+1)+(2y_4+2)=34$,
$y_1+y_2+y_3+y_4=14$ $\cdots$ ㉠
구하는 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는
방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는
음이 아닌 네 정수 y_1, y_2, y_3, y_4의 모든
순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)에서
$y_k\geq 7$인 4 이하의 자연수 k가 존재하는
순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)를 제외한 개수와 같다.

(i) 방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는
음이 아닌 네 정수 y_1, y_2, y_3, y_4의
모든 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허락하여
14개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_{14}={}_{17}C_{14}={}_{17}C_3=\frac{17\times 16\times 15}{3\times 2\times 1}=680$

(ii) $y_k\geq 7$인 k의 값이 1개인 경우
$y_1\geq 7$이라 하자.
$z_1=y_1-7$이라 하면 방정식 ㉠은
$z_1+y_2+y_3+y_4=7$
방정식 $z_1+y_2+y_3+y_4=7$을 만족시키는
음이 아닌 네 정수 z_1, y_2, y_3, y_4의 모든
순서쌍 (z_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허락하여
7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_7={}_{10}C_3=120$
이때 $y_l\geq 7$인 2 이상 4 이하의 자연수 l이
존재하는 순서쌍 (z_1, y_2, y_3, y_4)는
$(0, 7, 0, 0)$, $(0, 0, 7, 0)$, $(0, 0, 0, 7)$의
3가지이므로 $120-3=117$
같은 방법으로 $y_k\geq 7$인 2 이상 4 이하의
자연수 k가 존재하는 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의
개수도 각각 117이다.
따라서 $y_k\geq 7$인 k의 값이 1개인
순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)의 개수는
$4\times 117=468$

(iii) $y_k\geq 7$인 k의 값이 2개인 경우
순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4)는 $(7, 7, 0, 0)$,
$(7, 0, 7, 0)$, $(7, 0, 0, 7)$, $(0, 7, 7, 0)$,

(0, 7, 0, 7), (0, 0, 7, 7)의 6가지이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해
구하는 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는
$680-(468+6)=206$

[미적분]

23	⑤	**24**	①	**25**	④	**26**	②	**27**	③
28	③	**29**	18	**30**	13				

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{0+3}{1+0}=3$$

24. [출제의도] 로그함수의 미분 이해하기

$f(x)=\log_3 6x=\log_3 6+\log_3 x$

$f'(x)=(\log_3 6+\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$

따라서 $f'(9)=\dfrac{1}{9\ln 3}$

25. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)$가 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\times\frac{a_n}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$$

$$=\frac{2+3\times 2}{1+0}=8$$

26. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

$x=t$일 때 두 점 P, Q의 y좌표는 각각
e^{2t+k}, e^{-3t+k}이고
$\overline{\mathrm{PQ}}=t$를 만족시키는 k의 값이 $f(t)$이므로
$e^{2t+f(t)}-e^{-3t+f(t)}=t$
$e^{f(t)}\left(e^{2t}-e^{-3t}\right)=t$
$e^{f(t)}=\dfrac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$

$$\lim_{t\to 0+}e^{f(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{e^{2t}-e^{-3t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{2\times\frac{e^{2t}-1}{2t}+3\times\frac{e^{-3t}-1}{-3t}}$$

$$=\frac{1}{2\times 1+3\times 1}=\frac{1}{5}$$

27. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{OP'}}=t$, $\overline{\mathrm{OQ'}}=f(t)$
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$,
$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{PQ}}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$
삼각형 OPP′과 삼각형 OQQ′은 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{OP'}}:\overline{\mathrm{OQ'}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OQ}}$
$t:f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}:t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$에서
$f(t)=\dfrac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

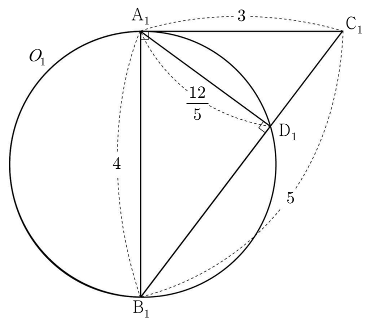
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=1^2\times\frac{1}{\sqrt{1}\times\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

28. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제해결하기



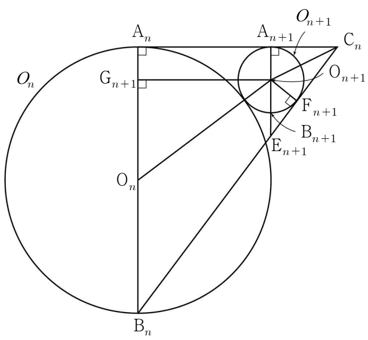
원 O_1의 반지름의 길이가 2이므로
반원의 넓이는 2π
직각삼각형 $\mathrm{C_1A_1B_1}$에서 $\overline{\mathrm{A_1C_1}}=3$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=4$이므로
$\overline{\mathrm{B_1C_1}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

선분 $\mathrm{A_1B_1}$은 원 O_1의 지름이므로 $\angle\mathrm{A_1D_1B_1}=\dfrac{\pi}{2}$
삼각형 $\mathrm{C_1A_1B_1}$에서
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A_1B_1}}\times\overline{\mathrm{A_1C_1}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{B_1C_1}}\times\overline{\mathrm{A_1D_1}}$이므로
$\overline{\mathrm{A_1D_1}}=\dfrac{12}{5}$

직각삼각형 $\mathrm{B_1D_1A_1}$에서 $\overline{\mathrm{B_1D_1}}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=\dfrac{16}{5}$

삼각형 $\mathrm{B_1D_1A_1}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{5}\times\dfrac{16}{5}=\dfrac{96}{25}$

그러므로 $S_1=2\pi+\dfrac{96}{25}$이다.
다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



두 원 O_n과 O_{n+1}의 중심을 각각 O_n과 O_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 각각 r_n과 r_{n+1}이라 하자.
직선 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$이 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 만나는 점을 E_{n+1}이라 하고, 원 O_{n+1}과 직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$이 접하는 점을 F_{n+1}이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이고
삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$은 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=3:5$에서 $\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{5}{3}a_n$이고

$\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{2}{3}a_n$이다.

삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$은 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=3:4$에서 $a_n=2r_{n+1}$이다.
점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}_n$에 내린 수선의 발을 G_{n+1}이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{G}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{3}{2}r_n-2r_{n+1}$

$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}}=r_n-r_{n+1}$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$이므로
직각삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$에서

$$(r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\left(\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}\right)^2$$

$16{r_{n+1}}^2-40r_{n+1}r_n+9{r_n}^2=0$
$(4r_{n+1}-r_n)(4r_{n+1}-9r_n)=0$
$r_n>r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\dfrac{1}{4}r_n$
원 O_n과 원 O_{n+1}의 닮음비가 $4:1$이며 넓이의 비는 $16:1$이다.
따라서 S_n은 첫째항이 $2\pi+\dfrac{96}{25}$이고 공비가 $\dfrac{1}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

29. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{DCB}=\alpha$이고 $\angle\mathrm{CDA}=2\alpha$
삼각형 ADC에서 $\beta=\dfrac{\pi}{3}-2\alpha$

$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha-1=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha=\dfrac{28}{49}$이고

$0<2\alpha<\pi$이므로 $\sin 2\alpha=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$$
$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan 2\alpha}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $54\sqrt{3}\times\tan\beta=18$

30. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 추론하기

$|x|>1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=a+\frac{b}{x}$$

$x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+b+1}{3}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{a-b-1}{3}$

$|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}=\frac{0+0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} a+\frac{b}{x} & (|x|>1) \\ \frac{a+b+1}{3} & (x=1) \\ \frac{a-b-1}{3} & (x=-1) \\ \frac{x}{2} & (|x|<1) \end{cases}$$

함수 $g(x)=2(x-1)+m$이라 하면

방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수는

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는

점의 개수와 같다.

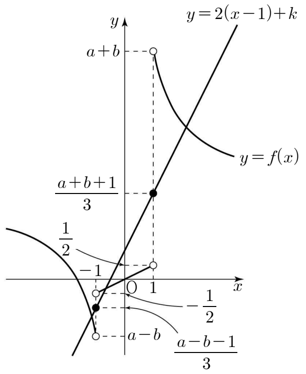
$x<-1$에서 $f(x)$는 감소하고 $x>1$에서 $f(x)$는 감소하므로 $|x|>1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고,

$|x|<1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 일차함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 1이다.

그러므로 $c_k=5$인 자연수 k가 존재하려면

$f(1)=g(1)$, $f(-1)=g(-1)$이어야 하고,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2(x-1)+k$는

두 점 $\left(1,\ \frac{a+b+1}{3}\right)$, $\left(-1,\ \frac{a-b-1}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{a+b+1}{3}=k$, $\frac{a-b-1}{3}=k-4$에서

$b=5$

$k=\frac{a}{3}+2$가 자연수이므로 a는 3의 배수이다. ⋯ ㉠

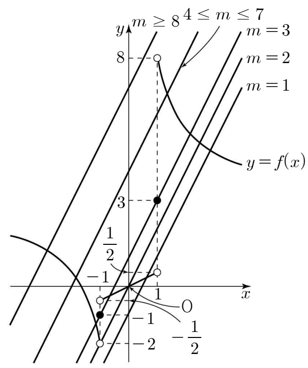
$\lim_{x\to-1-}f(x)<f(-1)<\lim_{x\to-1+}f(x)$이어야 하므로

$a-5<\frac{a}{3}-2<-\frac{1}{2}$에서 $a<\frac{9}{2}$ ⋯ ㉡

$a>0$이므로 $\frac{1}{2}<\frac{a}{3}+2<a+5$가 성립하며

$\lim_{x\to1-}f(x)<f(1)<\lim_{x\to1+}f(x)$를 만족시킨다.

㉠, ㉡에 의해 $0<a<\frac{9}{2}$이므로 $a=3$, $k=3$



(ⅰ) $m=1$일 때

$g(-1)=-3$, $g(1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $-1<x<1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_1=2$

(ⅱ) $m=2$일 때

$g(-1)=-2$, $g(1)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_2=2$

(ⅲ) $m=3$일 때

$m=k=3$이므로 $c_3=5$

(ⅳ) $4\le m\le7$일 때

$g(-1)>\lim_{x\to-1+}f(x)=-\frac{1}{2}$,

$g(1)<\lim_{x\to1+}f(x)=8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m=2$

(ⅴ) $m\ge8$일 때

$g(-1)>\lim_{x\to-1+}f(x)=-\frac{1}{2}$,

$g(1)\ge\lim_{x\to1+}f(x)=8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$에서 1개의 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m=1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해

$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)=3+1+1+4+1\times4=13$$

[기하]

23	①	24	③	25	②	26	④	27	⑤
28	⑤	29	115	30	63				

23. [출제의도] 벡터의 연산 계산하기

$$(2\vec{a}-m\vec{b})-(n\vec{a}-4\vec{b})=(2-n)\vec{a}-(m-4)\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$$

에서 $m-4=1$, $2-n=1$이므로

$m=5$, $n=1$

따라서 $m+n=6$

24. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식 이해하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(4,\ 7)$에서의

접선의 방정식은 $\frac{4x}{2}-\frac{7y}{7}=1$,

$2x-y=1$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{1}{2}$

25. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

점 Q는 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF}}$

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=12$

삼각형 PF′Q의 둘레의 길이가 20이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{OP}}$에서 $\overline{\mathrm{OP}}=4$

26. [출제의도] 포물선의 정의 이해하기

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{FA}}=8$

$\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{HA}}-\overline{\mathrm{HC}}=8-p$

$\overline{\mathrm{FB}}=\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{OF}}=8-2p$

$\overline{\mathrm{AB}}=h$라 하면

사다리꼴 OFAC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{(8-p)+p\}\times h=4h$

직각삼각형 FBA의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(8-2p)\times h=(4-p)h$

$4h:(4-p)h=2:1$이므로 $p=2$

$\overline{\mathrm{FB}}=4$이므로 직각삼각형 FBA에서

$h=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ACF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

27. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이용하여 추론하기

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 4이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=4$에서 $\overline{\mathrm{PF'}}=7$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$의 장축의 길이가 $2|a|$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=7+3=2|a|$에서 $a^2=25$

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{7}=1$에서 $c^2=25-7=18$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 $4+b^2=c^2=18$, $b^2=14$

따라서 $a^2+b^2=25+14=39$

28. [출제의도] 이차곡선을 이용하여 추론하기

점 $\mathrm{F}\left(\frac{9}{4},\ 0\right)$이 포물선의 초점이므로

준선의 방정식은 $x=-\frac{9}{4}$

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=x_1+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$에서 $x_1=4$, $y_1=6$

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$6y=\frac{9}{2}(x+4)$이고 점 F′을 지나므로 $c=4$

$\mathrm{P}(4,\ 6)$, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=10$

타원의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\frac{65}{4}$이고

$\overline{\mathrm{F'F}}=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$ 이므로

타원의 단축의 길이를 k라 하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(\frac{65}{8}\right)^2-\left(\frac{25}{8}\right)^2=\frac{225}{4}$

따라서 타원의 단축의 길이는 15

29. [출제의도] 벡터의 연산을 활용하여 문제해결하기

(ⅰ) 두 점 A, O의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{0}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}|=1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$의 방향이 같고 $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 값이 최대일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 값은 최대이다. 그러므로 선분 MC와 반원의 호가 만나는 점을 X라 하면 점 Q가 점 C이고 점 P가 점 X일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 값은 최대이다.

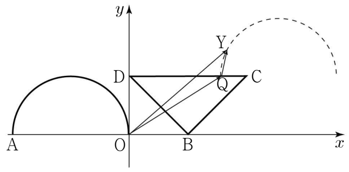
$\overline{\mathrm{MC}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{MP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|\le|\overrightarrow{\mathrm{MX}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}|=\sqrt{10}+1$

따라서 $M=\sqrt{10}+1$

(ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$



삼각형 BCD 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{QY}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}$인 점을 Y라 하자.

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QY}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OY}}|\ge|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$

이므로 점 Y가 점 Q일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 값은 최소이다. 점 Q가 선분 BD 위에 있고 $\overline{\mathrm{OQ}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 값은 최소이므로

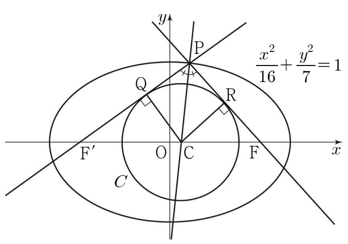
$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$M^2+m^2=(11+2\sqrt{10})+\frac{1}{2}=\frac{23}{2}+2\sqrt{10}$

따라서 $p=\frac{23}{2}$, $q=10$이므로 $p\times q=115$

30. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기



$c^2=16-7=9$, $c=3$

$\overline{\mathrm{FF'}}=2c=6$

직선 FP가 원 C와 접하는 점을 R라 하고

$\overline{\mathrm{PQ}}=a$라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=2\overline{\mathrm{PQ}}=2a$이므로 $\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PQ}}=a$

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RF}}$ 이고, $\angle\mathrm{PRC}=90^\circ$ 이므로

삼각형 PCR, FCR가 서로 합동이다.

$\overline{\mathrm{CP}}=l$이라 하면 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{FC}}$에서 $\overline{\mathrm{F'C}}=6-l$

$\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF'}}$ 이고

$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{QF'}}=8-3a$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}>\overline{\mathrm{PF}}$에서 $a<2$ ⋯ ㉠

삼각형 FPF′에서 $\angle\mathrm{F'PC}=\angle\mathrm{CPF}$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{F'C}}:\overline{\mathrm{CF}}$

$(8-2a):2a=(6-l):l$에서 $l=\frac{3}{2}a$ ⋯ ㉡

점 Q는 점 C에서 선분 PF′에 내린 수선의 발이므로 $\overline{\mathrm{F'C}}^2-\overline{\mathrm{F'Q}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2$

$(6-l)^2-(8-3a)^2=l^2-a^2$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에 의해 $4a^2-15a+14=0$

$(a-2)(4a-7)=0$에서 $a=2$ 또는 $a=\frac{7}{4}$

㉠에 의해 $a=\frac{7}{4}$, $l=\frac{21}{8}$

따라서 $24\times\overline{\mathrm{CP}}=63$