• 수학 영역 •

수학 정답

1	⑤	2	②	3	④	4	④	5	①
6	③	7	②	8	③	9	①	10	⑤
11	⑤	12	③	13	①	14	②	15	④
16	5	17	24	18	105	19	32	20	70
21	12	22	4						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}=3^2=9$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=3x^2+4x+3$ 이므로

$f'(-1)=3-4+3=2$

3. [출제의도] 등차수열을 이해하여 첫째항을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=6$에서

$a_1+3d=6$ …… ㉠

$2a_7=a_{19}$에서

$2(a_1+6d)=a_1+18d,\ a_1-6d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=4$

4. [출제의도] 함수의 극한을 이해하여 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0+1=1$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\cos\theta\tan\theta=\cos\theta\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로 $\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

따라서 $\cos\theta+\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

6. [출제의도] 평균변화율을 이해하여 함수의 미분계수를 구한다.

$\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=4a-1=7$에서 $a=2$이다.

한편 $f'(x)=4x-3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}&=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\\&=2f'(a)\\&=2f'(2)=10\end{aligned}$$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 곡선과 직선 및 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(3)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-3=2(x-3),\ y=2x-3$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_0^3\{x^2-4x+6-(2x-3)\}\,dx\\&=\int_0^3(x^2-6x+9)\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3=9\end{aligned}$$

8. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구한다.

$0\le x\le\dfrac{2\pi}{a}$에서 $0\le ax\le 2\pi$이므로

$2\cos ax=1$, 즉 $\cos ax=\dfrac{1}{2}$에서

$ax=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $ax=\dfrac{5\pi}{3}$, 즉 $x=\dfrac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\dfrac{5\pi}{3a}$

두 점 A, B의 좌표가 각각 $\left(\dfrac{\pi}{3a},\ 1\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{3a},\ 1\right)$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{3}$이므로

$\dfrac{5\pi}{3a}-\dfrac{\pi}{3a}=\dfrac{4\pi}{3a}=\dfrac{8}{3}$

$a=\dfrac{4\pi}{3}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{\pi}{2}$

9. [출제의도] 속도와 위치의 변화량을 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2+at$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^6 v(t)\,dt&=\int_0^6(3t^2+at)\,dt\\&=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^6\\&=36\left(6+\frac{a}{2}\right)=0\end{aligned}$$

$a=-12$

$v(t)=3t^2-12t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^6|v(t)|\,dt&=\int_0^6|3t^2-12t|\,dt\\&=\int_0^4(-3t^2+12t)\,dt+\int_4^6(3t^2-12t)\,dt\\&=\left[-t^3+6t^2\right]_0^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^6\\&=32+32=64\end{aligned}$$

10. [출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$

이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\ge k-1$이다.

함수 $g(f(x))$에서 $f(x)=t$라 하면 $t\ge k-1$이므로 함수 $g(t)$는 구간 $[k-1,\ \infty)$에서 정의된 함수이다.

한편 $g(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$g'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

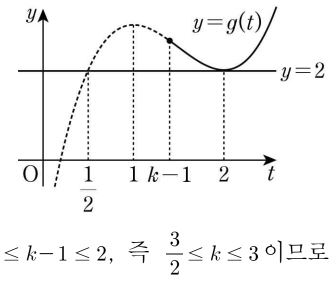
이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.

$g(t)=2$에서

$2t^3-9t^2+12t-2=2,\ (2t-1)(t-2)^2=0$

즉, 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=2$는 그림과 같다.



따라서 $\dfrac{1}{2}\le k-1\le 2$, 즉 $\dfrac{3}{2}\le k\le 3$이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

11. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하여 사각형의 넓이를 구한다.

점 A의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}+1)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로 점 B의 좌표는 $(k,\ 2^{k-1}-7)$이다.

직선 BC의 기울기가 -1이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$이므로 두 점 B, C의 x좌표의 차와 y좌표의 차는 모두 2이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(k-2,\ 2^{k-1}-5)$이다.

한편 점 C는 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점이므로

$2^{k-3}+1=2^{k-1}-5$

$\dfrac{1}{2}\times 2^k-\dfrac{1}{8}\times 2^k=6,\ 2^k=16$

$k=4$

즉, $\mathrm{A}(4,\ 9)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$, $\mathrm{C}(2,\ 3)$이다.

점 B가 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로

$1=\log_2(4-a),\ 4-a=2,\ a=2$

점 D의 x좌표는 $x-2=1$에서 3

사각형 ACDB의 넓이는 두 삼각형 ACB, CDB의 넓이의 합이고 $\overline{\mathrm{BC}}\perp\overline{\mathrm{BD}}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times 8\times 2+\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=10$

12. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$는 $f(1)=0$, $f(a)=0$이고, $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=-4+2a$에서 $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 2+}f(x)$이므로 $x=2$에서 불연속이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$, $x=a$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(1)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0$, $g(a)=0$

또, $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}$, $\dfrac{g(2)}{-1}=\dfrac{g(2)}{-4+2a}$이므로

$g(2)=0$이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}h(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}\\&=\frac{1-a}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}h(x)&=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}\\&=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}\end{aligned}$$

$h(1)=h(a)$이므로

$\dfrac{1-a}{2}=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{a}$

$a>2$이므로 $a=4$

따라서

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\le 2)\\[2mm] -\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$h(1)+h(3)=-\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{13}{6}$

13. [출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 수열의 첫째항을 구하는 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $d\ge 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d<0$이어야 한다.

(i) $S_3=S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2}=\dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$에서

$a_1=-4d$이므로

$S_3=S_6=-9d>0$,

$S_{11}=\dfrac{11(2a_1+10d)}{2}=11d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$에서

$-9d=-11d-3,\ d=-\dfrac{3}{2}$

$a_1=-4d=6$

(ii) $S_3=-S_6$ 인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2}=-\dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$ 에서

$a_1=-2d$ 이므로

$S_3=-S_6=-3d>0$

$S_{11}=\dfrac{11(2a_1+10d)}{2}=33d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$ 에서

$-3d=-33d-3,\ d=-\dfrac{1}{10}$

$a_1=-2d=\dfrac{1}{5}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항의 합은 $6+\dfrac{1}{5}=\dfrac{31}{5}$ 이다.

14. [출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 추론한다.

ㄱ. $k=0$ 일 때, $f(x)+g(x)=x^3+2x^2+4$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4$ 라 하면

$h_1{}'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)=0$

에서 함수 $h_1(x)$ 는 $x=-\dfrac{4}{3}$ 에서 극대, $x=0$ 에서 극소이다.

$h_1(0)=4>0$ 이므로 방정식 $h_1(x)=0$ 은 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)-g(x)=0$ 에서

$x^3-kx+6-(2x^2-2)=0,\ x^3-2x^2+8=kx$

$h_2(x)=x^3-2x^2+8$ 이라 하면 곡선 $y=h_2(x)$ 에 직선 $y=kx$ 가 접할 때만 방정식 $h_2(x)=kx$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다. 접점의 좌표를 $(a,\ a^3-2a^2+8)$ 이라 하면 $h_2{}'(x)=3x^2-4x$ 에서 접선의 방정식은

$y-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로

$0-(a^3-2a^2+8)=(3a^2-4a)(0-a)$,

$(a-2)(a^2+a+2)=0,\ a=2$

따라서 구하는 k 의 값은 $h_2{}'(2)=4$ 뿐이다. (참)

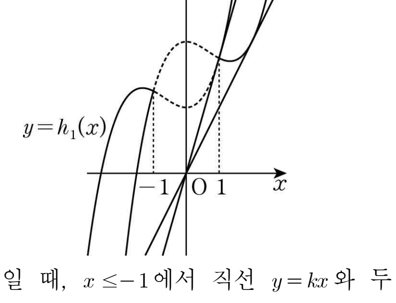
ㄷ. $|x^3-kx+6|=2x^2-2$ 에서 $2x^2-2\ge 0$ 이므로 x 의 값의 범위는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$ 이고, 주어진 방정식은

$x^3-kx+6=-(2x^2-2)$ 또는 $x^3-kx+6=2x^2-2$,

즉 $x^3+2x^2+4=kx$ 또는 $x^3-2x^2+8=kx$

$h_1(x)=x^3+2x^2+4,\quad h_2(x)=x^3-2x^2+8$ 이라 하면 주어진 방정식의 실근의 개수는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$ 일 때 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 교점의 개수와 같다.

ㄴ에서 $k=4$ 일 때 직선 $y=kx$ 와 곡선 $y=h_2(x)$ 가 접하므로 $k\le 4$ 일 때 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 교점의 개수의 최댓값은 3이다.



$k>4$ 일 때, $x\le -1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 원점에서 곡선 $y=h_1(x)$ 에 그은 접선의 방정식은 $y=7x$ 이고 접점의 좌표는 $(1,\ 7)$ 이므로 $k>4$ 일 때, $x\ge 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 2이다. 즉, $k>4$ 일 때, $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$ 에서 직선 $y=kx$ 와 두 곡선 $y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 4이다.

따라서 방정식 $|f(x)|=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은 4이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15. [출제의도] 코사인법칙과 사인법칙을 이용하여 각의 사인값을 추론한다.

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{BD}=\sqrt{7}$ 이다.

$\angle BAD+\angle BCD=\pi$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$2^2+\overline{CD}^2-2\times2\times\overline{CD}\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=7$

이므로 $\overline{CD}=\boxed{1}$ 이다.

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$ 는 공통이고 $\angle EAB=\angle ECD$ 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다. 따라서 $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{EB}}{\overline{ED}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ 이다. 즉,

$\dfrac{3+\overline{ED}}{\overline{EC}}=\dfrac{2+\overline{EC}}{\overline{ED}}=\dfrac{2}{1}$

에서 $\overline{ED}=\boxed{\dfrac{7}{3}}$ 이다.

$\angle DCE=\pi-\angle BCD=\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$\dfrac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sin\theta}$

에서 $\sin\theta=\boxed{\dfrac{3\sqrt{3}}{14}}$ 이다.

$p=1,\ q=\dfrac{7}{3},\ r=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ 이므로

$(p+q)\times r=\left(1+\dfrac{7}{3}\right)\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14}=\dfrac{5\sqrt{3}}{7}$

16. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그를 계산한다.

$$\begin{aligned}\frac{\log_5 72}{\log_5 2}-4\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}&=\log_2 72-\log_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4\\&=\log_2\left(72\times\frac{4}{9}\right)\\&=\log_2 2^5=5\end{aligned}$$

17. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$$\begin{aligned}&\int_{-3}^{2}(2x^3+6|x|)\,dx-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx\\&=\int_{-3}^{-2}(2x^3+6|x|)\,dx+\int_{-2}^{2}(2x^3+6|x|)\,dx\\&\qquad-\int_{-3}^{-2}(2x^3-6x)\,dx\\&=\int_{-2}^{2}(2x^3+6|x|)\,dx\\&=2\int_0^2 6x\,dx=2\Big[3x^2\Big]_0^2=24\end{aligned}$$

18. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 합을 이해하여 부등식을 만족시키는 자연수의 값을 구한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}=\frac{2^5-1}{2-1}=31$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2\times3^{k-1})=\frac{2\times(3^5-1)}{3-1}=242$

이므로 주어진 부등식에서 $31<n^2<242$ 이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 값은 6, 7, 8, $\cdots$, 15이고 그 합은 $\dfrac{10\times(6+15)}{2}=105$ 이다.

19. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 실수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$ 라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$\quad=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1,\ x=2$ 에서 극소, $x=0$ 에서 극대이다.

이때 $f(-1)=-5+k,\ f(2)=-32+k$ 이므로

$f(-1)>f(2)$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 항상 성립하려면 $f(2)=-32+k\ge 0$ 즉, $k\ge 32$ 이어야 한다.

따라서 실수 k 의 최솟값은 32이다.

20. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 해석하여 수열의 첫째항을 추론한다.

$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\ge 0)\end{cases}$ …… ㉠

이고 $1<a_1<2$ 에서 $a_1\ge 0$ 이므로

$a_2=a_1-2<0$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-2)>0$

$a_4=a_3-2=-2(a_1-2)-2=-2(a_1-1)<0$

$a_5=-2a_4=4(a_1-1)>0$

$a_6=a_5-2=4(a_1-1)-2=4a_1-6$

이때 ㉠에서 $a_6<0$ 이면 $a_7=-2a_6>0$ 이므로

$a_7=-1\le 0$ 에서 $a_6\ge 0$ 이다.

$a_7=a_6-2=(4a_1-6)-2=4a_1-8=-1$

$a_1=\dfrac{7}{4}$

따라서

$40\times a_1=40\times\dfrac{7}{4}=70$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

점 $A(a,\ b)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $B(b,\ a)$ 이다.

조건 (가)에서 점 $A(a,\ b)$ 가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이므로

$b=\log_2(a+2)+k$ …… ㉠

조건 (나)에서 점 $B(b,\ a)$ 가 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위의 점이므로

$a=4^{b+k}+2$ …… ㉡

㉠에서

$b-k=\log_2(a+2),\ 2^{b-k}=a+2$

$a=2^{b-k}-2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 정리하면

$4^{b+k}+2=2^{b-k}-2$

$4^k\times4^b-2^{-k}\times2^b+4=0$ …… ㉣

조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나이므로 방정식 ㉣을 만족시키는 실수 b 는 오직 하나이고

$2^b=t\ (t>0)$ 으로 놓으면 t 에 대한 이차방정식

$4^kt^2-2^{-k}t+4=0$ …… ㉤

은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t 에 대한 이차방정식 ㉤의 두 근의 곱은 $\dfrac{4}{4^k}=4^{1-k}>0$ 이므로 t 에 대한 이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D 라 할 때 $D=0$ 이어야 한다.

$D=(-2^{-k})^2-4\times4^k\times4$

$\quad=4^{-k}-16\times4^k=0$

위의 방정식의 양변에 4^k 을 곱하여 정리하면

$2^{4k+4}=1,\ k=-1$

㉢에 대입하여 정리하면

$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0,\ \frac{1}{4}(t-4)^2=0$

$t=4$

즉, $2^b=4$에서 $b=2$이다.

$k=-1,\ b=2$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$a=4^{2+(-1)}+2=6$

따라서 $a\times b=6\times 2=12$

22. **[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.**

삼차함수 $g(x)$의 상수항이 0이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖는다. …… ㉠

조건 (가)의 $x|g(x)|=\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$에 $x=2a$를 대입하면 $2a|g(2a)|=0$

a가 양수이므로 $g(2a)=0$이고 $g(x)$는 $(x-2a)$를 인수로 갖는다. ……㉡

㉠, ㉡에서 $g(x)=x(x-2a)(x-b)$ (단, b는 실수)

함수 $(a-x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $\frac{d}{dx}\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=(a-x)f(x)$이다.

즉, 함수 $x|g(x)|$는 $x=2a$에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2a+}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}&=\lim_{x\to 2a+}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}\\&=\lim_{x\to 2a+}x^2|x-b|\\&=4a^2|2a-b|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2a-}\frac{x|g(x)|-2a|g(2a)|}{x-2a}&=\lim_{x\to 2a-}\frac{x|x(x-2a)(x-b)|}{x-2a}\\&=\lim_{x\to 2a-}(-x^2|x-b|)\\&=-4a^2|2a-b|\end{aligned}$$

이므로 $4a^2|2a-b|=-4a^2|2a-b|$에서 $b=2a$이다.

따라서 $g(x)=x(x-2a)^2$

$$\int_{2a}^{x}(a-t)f(t)\,dt=\begin{cases}-x^2(x-2a)^2 & (x<0)\\ x^2(x-2a)^2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

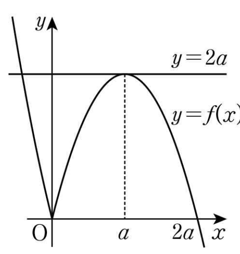
$$(a-x)f(x)=\begin{cases}-4x(x-a)(x-2a) & (x<0)\\ 4x(x-a)(x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}4x(x-2a) & (x<0)\\ -4x(x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

방정식 $g(f(x))=0$에서

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=2a$

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 $0,\ 2a$를 가지므로 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=2a$는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2a$의 교점의 개수가 2이어야 하므로

$$\begin{aligned}f(a)&=-4a(a-2a)\\&=4a^2=2a\end{aligned}$$

$a=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\int_{-2a}^{2a}f(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(4x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{1}(-4x^2+4x)\,dx\\&=\left[\frac{4}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{1}\\&=4\end{aligned}$$

[확률과 통계]

23	④	*24*	②	*25*	⑤	*26*	①	*27*	③
28	④	*29*	65	*30*	708				

23. **[출제의도] 중복순열의 수를 계산한다.**

${}_3\Pi_4=3^4=81$

24. **[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

(i) 일의 자리의 수가 1인 경우

1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우

1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $20+10=30$

25. **[출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

A 학교 학생 5명을 배열하는 원순열의 수는

$(5-1)!=24$

A 학교 학생 사이에 B 학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는 $24\times 20=480$

26. **[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b, 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{5!}{2!\times 3!}=10$이다.

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 3개의 c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!\times 3!}=20$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times 20=200$

27. **[출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.**

8권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

첫 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수는 먼저 첫 번째 칸에 6권의 책을 꽂고 남은 2권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

마찬가지로 두 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수도 6이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$45-6-6=33$

28. **[출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.**

(i) 학생 B가 2개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

남은 3개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$10\times(8-1)=70$

(ii) 학생 B가 1개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

남은 4개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$5\times(16-1)=75$

(iii) 학생 B가 사탕을 받지 못하는 경우

5개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는 $32-1=31$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$70+75+31=176$

29. **[출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.**

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 -1과 1을 적어도 1개씩 선택하거나, 0을 적어도 2개 선택해야 한다.

(i) -1과 1을 적어도 1개씩 선택하는 경우

-1과 1을 1개씩 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

(ii) 0을 적어도 2개 선택하는 경우

0을 2개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

(iii) 위의 (i), (ii)를 동시에 만족시키는 경우

-1을 1개, 0을 2개, 1을 1개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_5H_1={}_{5+1-1}C_1={}_5C_1=5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$35+35-5=65$

30. **[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.**

(i) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY 꼴인 경우

4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times 6=36$

(ii) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ 꼴인 경우

4개의 문자 중 X에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

Y, Z에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

Y, Z에 해당하는 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=4$

4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

그러므로 구하는 경우의 수는 $4\times 3\times 4\times 12=576$

(iii) 4개의 원판에 적힌 문자가 모두 다른 경우

각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=16$

D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3!=6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $16\times 6=96$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$36+576+96=708$

[미적분]

23	②	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	①	29	28	30	80				

23. [출제의도] 등비수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2\times0+\frac{1}{3}}{0+1}=\frac{1}{3}$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$b_n=3a_n-5n$ 이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=2$, $a_n=\frac{b_n+5n}{3}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2}\times\frac{b_n+5n}{3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(b_n\times\frac{1}{n}+5\right)}{12}$$
$$=\frac{(2+0)(2\times0+5)}{12}=\frac{5}{6}$$

25. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+n)-(an^2-an)}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}}=\frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$ 에서 $\frac{a+1}{2\sqrt{a}}=\frac{5}{4}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2-17a+4=0$, $(4a-1)(a-4)=0$,

$a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=4$

따라서 모든 양수 a의 값의 합은 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$

26. [출제의도] 수열의 합과 극한에 대한 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

수열 $\{b_n\}$은 $n\ge2$일 때,

$$\frac{1}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_k}=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

에서 $b_n=\frac{1}{2n-1}$ 이고 $b_1=1$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\frac{1}{2n-1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

${a_n}^2<4na_n+n-4n^2$ 에서 ${a_n}^2-4na_n+4n^2<n$,

$(a_n-2n)^2<n$, $2n-\sqrt{n}<a_n<2n+\sqrt{n}$,

$$2-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+3}{2+\frac{4}{n}}=\frac{2+3}{2+0}=\frac{5}{2}$

28. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론하여 수열의 극한값을 구한다.

점 A_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

규칙 (나)에서 $x_{2n}=x_{2n-1}+a$, $y_{2n}=y_{2n-1}$

규칙 (다)에서 $x_{2n+1}=x_{2n}$, $y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

$x_{2n+2}=x_{2n+1}+a=x_{2n}+a$,

$y_{2n+2}=y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

즉 두 수열 $\{x_{2n}\}$, $\{y_{2n}\}$은 공차가 각각 a, $a+1$인 등차수열이고, 규칙 (가)에서

$x_2=x_1+a=a$, $y_2=y_1=0$이므로

$x_{2n}=a+(n-1)a=an$,

$y_{2n}=0+(n-1)(a+1)=(a+1)(n-1)$

그러므로

$$\overline{A_1A_{2n}}^2={x_{2n}}^2+{y_{2n}}^2$$
$$=a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a^2+(a+1)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$$
$$=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$ 에서 $\sqrt{2a^2+2a+1}=\frac{\sqrt{34}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2+4a-15=0$, $(2a+5)(2a-3)=0$,

$a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

따라서 양수 a의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

29. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 구하여 문제를 해결한다.

함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로 $f(x)=-1$

(ii) $x=1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n=1$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}$

(iii) $x=-1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이고 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$

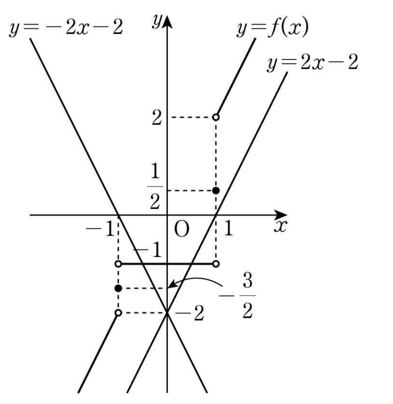
이므로 $f(x)=-\frac{3}{2}$

(iv) $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=2x$$

그러므로 $f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ -\frac{3}{2} & (x=-1)\\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1\le t<-\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}<t\le0$일 때 $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $0<t\le1$ 또는 $t=2$ 또는 $t\ge4$일 때 $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}<t<4$일 때 $g(t)=2$

$t=\frac{5}{2}$일 때 $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은

-1, $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2, $\frac{5}{2}$, 4

이므로 $m=7$, $a_m=4$

따라서 $m\times a_m=7\times4=28$

30. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.

점 P_n의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2$

$\overline{OP_n}=2n+2$이므로 $\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2\right)^2}=2n+2$에서

$t=n+1$

직각삼각형 P_nOH_n에서 $\overline{OH_n}:\overline{P_nH_n}=1:\sqrt{3}$이므로

$\tan(\angle P_nOH_n)=\sqrt{3}$ 즉 $\angle P_nOH_n=\frac{\pi}{3}$

$\angle R_nP_nH_n=2\times\angle OP_nH_n=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$이라 하자.

(i) 곡선 T_n과 x축 및 선분 P_nH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)+h(n)$이므로

$$f(n)+h(n)=\int_0^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}x^3\right]_0^{n+1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2\ \cdots\cdots\ ㉠$$

(ii) 점 Q_n을 포함하는 호 R_nH_n과 두 선분 OR_n, OH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$이고, 이 값은 사각형 $OH_nP_nR_n$의 넓이에서 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 $P_nR_nH_n$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$g(n)+h(n)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OH_n}\times\overline{P_nH_n}\right)-\frac{1}{2}\times\overline{P_nH_n}^2\times\frac{\pi}{3}$$
$$=\sqrt{3}(n+1)^2-\frac{\pi(n+1)^2}{2}$$
$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)(n+1)^2\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$f(n)-g(n)=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

그러므로 $k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $60k^2=60\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=80$

[기하]

23	②	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	④	29	128	30	384				

23. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 계산한다.

포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P와 y축 사이의 거리가 3이므로 점 P와 준선 사이의 거리는 $2+3=5$

따라서 $\overline{PF}=5$

24. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 단축의 길이를 구한다.

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$이라 하자.
두 초점의 좌표가 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이므로
$b^2-a^2=9$ …… ㉠
타원이 y축과 만나는 점 $(0,\ 7)$은 장축의 한 끝점이므로 $b=7$
㉠에서 $a=2\sqrt{10}$
따라서 타원의 단축의 길이는
$2a=4\sqrt{10}$

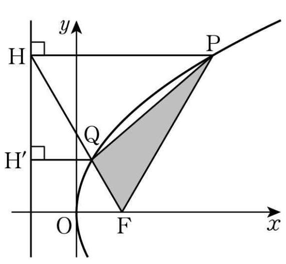
25. [출제의도] 쌍곡선의 점근선의 성질을 이해하여 도형의 넓이를 구한다.

$4x^2-8x-y^2-6y-9=0$에서
$4(x-1)^2-(y+3)^2=4$,
$(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$
쌍곡선 $(x-1)^2-\frac{(y+3)^2}{4}=1$은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 이 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은
$y-(-3)=2(x-1)$, $y=2x-5$
직선 $y=2x-5$의 x절편, y절편이 각각 $\frac{5}{2}$, -5이다.
따라서 직선 $y=2x-5$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{4}$

26. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

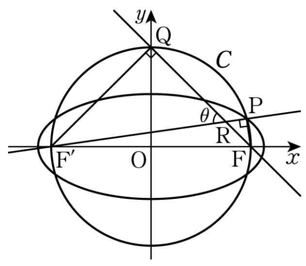
타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점의 좌표는
$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$
이고 장축의 길이는 10이므로
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=10$, $\overline{\mathrm{FF'}}=2\times4=8$ …… ㉠
세 선분 PF, PF′, FF′의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{FF'}}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$\overline{\mathrm{PF}}=2(10-\overline{\mathrm{PF}})-8$
$\overline{\mathrm{PF}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=6$
$\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{FF'}}$이므로 점 P의 x좌표를 t라 할 때,
$0<t<4$
점 P에서 선분 FF′에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{HF}}=4-t$, $\overline{\mathrm{HF'}}=4+t$
$\overline{\mathrm{PH}}^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2-\overline{\mathrm{HF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{HF}}^2$에서
$6^2-(4+t)^2=4^2-(4-t)^2$,
$t=\frac{5}{4}$
따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{5}{4}$이다.

27. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.



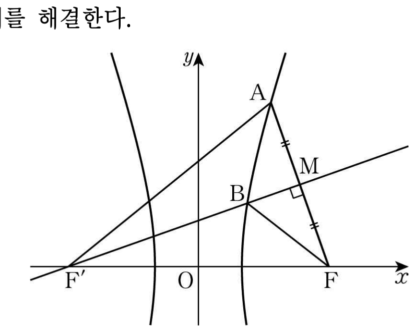
점 Q에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
점 Q는 포물선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QH'}}$
조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{QF}}:\overline{\mathrm{QH}}=1:2$이므로
$\cos(\angle\mathrm{HFO})=\cos(\angle\mathrm{HQH'})=\frac{\overline{\mathrm{QH'}}}{\overline{\mathrm{QH}}}=\frac{1}{2}$
그러므로 $\angle\mathrm{HFO}=60°$
$\overline{\mathrm{PH}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{OF}}$이므로 $\angle\mathrm{PHF}=\angle\mathrm{HFO}=60°$
이때 삼각형 PHF는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$인 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{PFH}=\angle\mathrm{PHF}=60°$
$\angle\mathrm{FPH}=180°-(60°+60°)=60°$이므로
삼각형 PHF는 정삼각형이다.
이때 초점 F의 좌표가 $(p,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{FH}}=4p$
조건 (나)에서 삼각형 PQF의 넓이는 정삼각형 PHF의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로
$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4p)^2=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $p^2=2$
따라서 $p>0$이므로 $p=\sqrt{2}$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



두 직선 F′P, QF의 교점을 R라 하면 두 직각삼각형 QF′R, PFR가 서로 닮음이고
$\cos(\angle\mathrm{QRF'})=\cos(\angle\mathrm{PRF})=\cos\theta=\frac{3}{5}$
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{4}{5}$
$\overline{\mathrm{QR}}=3t$ $(t>0)$이라 할 때
$\overline{\mathrm{RF'}}=\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\cos\theta}=5t$,
$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{QF'}}=\overline{\mathrm{RF'}}\sin\theta=4t$,
$\overline{\mathrm{RF}}=\overline{\mathrm{QF}}-\overline{\mathrm{QR}}=4t-3t=t$,
$\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{RF}}\cos\theta=\frac{3}{5}t$,
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{RF}}\sin\theta=\frac{4}{5}t$
점 P는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{RF'}}+\overline{\mathrm{RP}}+\overline{\mathrm{PF}}$
$=5t+\frac{3}{5}t+\frac{4}{5}t$
$=\frac{32}{5}t$
$2a=\frac{32}{5}t$에서 $a=\frac{16}{5}t$
점 F의 좌표를 $(c,\ 0)$ $(c>0)$이라 할 때
$\overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{QF}}$에서 $c=2\sqrt{2}t$
$b^2=a^2-c^2=\frac{256}{25}t^2-8t^2=\frac{56}{25}t^2$
따라서 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\frac{56}{25}t^2}{\frac{256}{25}t^2}=\frac{7}{32}$

29. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 도형에 대한 문제를 해결한다.



그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-6,\ 0)$이라 하자.
점 F′이 선분 AF의 수직이등분선 위의 점이므로
두 직각삼각형 AF′M, FF′M이 합동이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=12$
점 A가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{AF'}}-\overline{\mathrm{AF}}=4$에서 $\overline{\mathrm{AF}}=8$
점 M은 선분 AF의 중점이므로
$\overline{\mathrm{AM}}=4$
직각삼각형 AF′M에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{MF'}}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$
점 B가 쌍곡선 위의 점이므로
$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BF'}}-4$이고
$\overline{\mathrm{BM}}=8\sqrt{2}-\overline{\mathrm{BF'}}$이므로
삼각형 BFM의 둘레의 길이는
$\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{FM}}+\overline{\mathrm{BM}}=(\overline{\mathrm{BF'}}-4)+4+(8\sqrt{2}-\overline{\mathrm{BF'}})$
$=8\sqrt{2}$
따라서 $k=8\sqrt{2}$이므로 $k^2=128$

30. [출제의도] 두 포물선의 관계를 추론하여 삼각형의 넓이를 구한다.

좌표평면에서 점 $\mathrm{F_1}$을 원점, 직선 $\mathrm{A_1F_1}$을 x축, 직선 $\mathrm{F_1F_2}$를 y축이라 하자.
포물선 P_1의 방정식을 $y^2=4p(x+p)$ $(p>0)$이라 하면
$\overline{\mathrm{A_1F_1}}=p$, $\overline{\mathrm{F_1C}}=2p$에서 $\overline{\mathrm{A_1C}}=\sqrt{p^2+(2p)^2}=p\sqrt{5}$
조건 (가)에서 $p\sqrt{5}=5\sqrt{5}$이므로
$p=5$
두 선분 $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{F_1F_2}$의 중점은 서로 일치하므로 사각형 $\mathrm{A_1F_1A_2F_2}$는 평행사변형이다.
포물선 P_1의 준선 l_1의 방정식은 $x=-10$이고 포물선 P_2의 준선 l_2의 방정식은 $x=10$이다.
점 B에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면
$\overline{\mathrm{BH_1}}+\overline{\mathrm{BH_2}}=20$ …… ㉠
점 B는 두 포물선이 만나는 점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{F_1B}}=\overline{\mathrm{BH_1}}$, $\overline{\mathrm{F_2B}}=\overline{\mathrm{BH_2}}$
조건 (나)에서
$\overline{\mathrm{BH_1}}-\overline{\mathrm{BH_2}}=\frac{48}{5}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{BH_1}}=\frac{74}{5}$, $\overline{\mathrm{BH_2}}=\frac{26}{5}$
점 B에서 직선 $\mathrm{F_1F_2}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{BH}}=10-\overline{\mathrm{BH_2}}=\frac{24}{5}$
직각삼각형 $\mathrm{BF_2H}$에서
$\overline{\mathrm{F_2H}}^2=\overline{\mathrm{F_2B}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2$
$=(\overline{\mathrm{F_2B}}-\overline{\mathrm{BH}})(\overline{\mathrm{F_2B}}+\overline{\mathrm{BH}})$
$=\left(\frac{26}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{26}{5}+\frac{24}{5}\right)$
$=4$
이므로 $\overline{\mathrm{F_2H}}=2$
직각삼각형 $\mathrm{F_1BH}$에서
$\overline{\mathrm{F_1H}}^2=\overline{\mathrm{F_1B}}^2-\overline{\mathrm{BH}}^2$
$=(\overline{\mathrm{F_1B}}-\overline{\mathrm{BH}})(\overline{\mathrm{F_1B}}+\overline{\mathrm{BH}})$
$=\left(\frac{74}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{74}{5}+\frac{24}{5}\right)$
$=196$
이므로 $\overline{\mathrm{F_1H}}=14$
$\overline{\mathrm{F_1F_2}}=\overline{\mathrm{F_1H}}+\overline{\mathrm{F_2H}}=14+2=16$
그러므로 삼각형 $\mathrm{BF_2F_1}$의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F_1F_2}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\times16\times\frac{24}{5}=\frac{192}{5}$
따라서
$10S=10\times\frac{192}{5}=384$