정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	①	3	④	4	③	5	②
6	②	7	①	8	①	9	⑤	10	④
11	②	12	③	13	②	14	③	15	⑤
16	⑤	17	④	18	⑤	19	①	20	③
21	④	22	12	23	2	24	28	25	106
26	503	27	13	28	60	29	50	30	150

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$z=2+3i$ 이면 $\bar{z}=2-3i$ 이므로 $z+\bar{z}=4$ 이다.

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A=x^2+2x-1$, $B=x^2-x+3$ 에 대하여
$2A=2x^2+4x-2$ 이므로
$2A-B=x^2+5x-5$ 이다.

3. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$f(x)=x^4+2x^3+3x^2+4x+5$ 라 하면
$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 $f(1)$ 이므로
$f(1)=1+2+3+4+5=15$ 이다.
따라서 나머지는 15 이다.

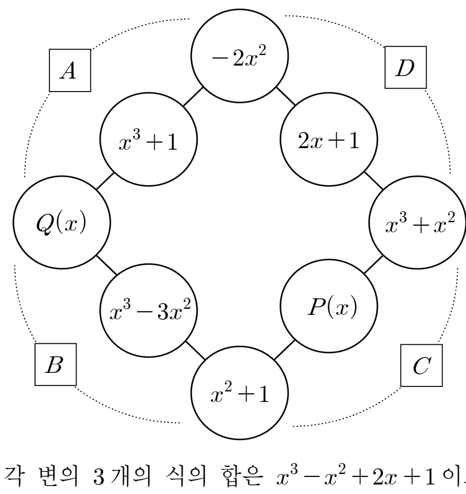
4. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2+ax-2=0$ 의 두 근의 곱이 -2 이므로 $b=-2$ 이다.
두 근이 1과 -2 이므로 두 근의 합은 -1 이다.
따라서 $a=1$ 이므로 $a-b=3$ 이다.

5. [출제의도] 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계 추론하기

이차함수의 그래프와 x 축이 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-6x+a=0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=9-a<0$ 이므로 $a>9$ 이다.
따라서 정수 a 의 최솟값은 10 이다.

6. [출제의도] 다항식의 계산과 항등식 문제 해결하기



각 변의 3 개의 식의 합은 x^3-x^2+2x+1 이므로
$P(x)+x^3+x^2+x^2+1=x^3-x^2+2x+1$ 과
$Q(x)+x^3-3x^2+x^2+1=x^3-x^2+2x+1$ 에서
$P(x)=-3x^2+2x$, $Q(x)=x^2+2x$ 이다.
따라서 $P(x)+Q(x)=-2x^2+4x$ 이다.

7. [출제의도] 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

$f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x+1$ 이므로
$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$ 로 나타낼 수 있고,
$\{f(x)\}^2$
$=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x+1)^2$
$=(x^2+1)\left[(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2(x+1)Q(x)+1\right]+2x$
이다.
따라서 $\{f(x)\}^2$ 을 x^2+1 로 나눈 나머지는
$R(x)=2x$ 이고 $R(3)=6$ 이다.

8. [출제의도] 복소수 계산하기

방정식 $2x^2-2x+1=0$ 의 근은 $x=\frac{1\pm i}{2}$ 이다.

이때, $\alpha=\frac{1+i}{2}$ 라 하면 $\alpha^2=\frac{1}{2}i$ 이다.

$\alpha^4=\left(\frac{1}{2}i\right)^2=-\frac{1}{4}$

$\alpha^4-\alpha^2+\alpha=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i+\frac{1+i}{2}=\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{1-i}{2}$ 인 경우도 마찬가지로 성립한다.

따라서 $\alpha^4-\alpha^2+\alpha=\frac{1}{4}$ 이다.

[다른 풀이]

$\alpha^2=\alpha-\frac{1}{2}$ 이므로 $\alpha^4=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2=\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}$

$\alpha^4-\alpha^2+\alpha=\frac{1}{4}$ 이다.

9. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

$z=x^2-(5-i)x+4-2i$
$\;=(x^2-5x+4)+(x-2)i$ 이고
$\bar{z}=-z$ 가 성립하려면 z 의 실수부분이 0 이어야 한다.
z 의 실수부분이 x^2-5x+4 이므로
$x^2-5x+4=0$ 의 근은 $x=1$, 4 이다.
따라서 모든 실수 x 값의 합은 5 이다.

10. [출제의도] 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 5 & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 3 & -6 & 3 & \boxed{2} \end{array}$$

위의 조립제법에 의하여
$3x^3-7x^2+5x+1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x+3)+2$
$\qquad=(3x-1)(x^2-2x+1)+2$
이다.
$\boxed{(가)}=3x^2-6x+3$
$\boxed{(나)}=x^2-2x+1$ 이므로
$f(x)=3x^2-6x+3$
$g(x)=x^2-2x+1$ 이다.
따라서 $f(2)+g(2)=4$ 이다.

11. [출제의도] 곱셈공식을 이용하여 식의 값 추론하기

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$ 이므로
$x-y=2$, $x^3-y^3=12$ 를 대입하면,
$12=2^3+3xy\times 2$
$6xy=4$ 이다.
따라서 $xy=\frac{2}{3}$ 이다.

12. [출제의도] 이차함수 이해하기

직선 $y=-x+a$ 가 이차함수 $y=x^2+bx+3$ 의 그래프에 접하므로
이차방정식 $x^2+(b+1)x+3-a=0$ 이 중근을 갖는다.
이차방정식의 판별식을 D 라 하면
$D=(b+1)^2-4(3-a)=0$ 이고
a 를 b 에 대하여 정리하면
$a=-\frac{1}{4}(b+1)^2+3$ 이므로
실수 a 의 최댓값은 3 이다.

13. [출제의도] 다항식의 성질을 이용하여 실생활 문제 해결하기

실린더의 개수가 M 인 두 자동차 A, B 의 보어를 각각 R_A, R_B 라 하고,
스트로크를 각각 H_A, H_B 라 하자.

$R_A=\frac{2}{3}R_B$, $H_A=\frac{9}{8}H_B$ 이므로

$$W_A=\pi\left(\frac{R_A}{2}\right)^2\frac{H_AM}{1000}=\pi\left(\frac{\frac{2}{3}R_B}{2}\right)^2\frac{\frac{9}{8}H_BM}{1000}=\frac{1}{2}W_B$$

따라서 $\frac{W_A}{W_B}=\frac{1}{2}$ 이다.

14. [출제의도] 이차함수의 최솟값 문제 해결하기

ⅰ) $p=-1$ 일 때, $f(x)=x^2+4x$ 이므로 $0\le x\le 2$ 에서 최솟값은 0 이다. $g(-1)=0$

ⅱ) $p=\frac{1}{2}$ 일 때, $f(x)=x^2-2x$ 이므로 $0\le x\le 2$ 에서 최솟값은 -1 이다. $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

따라서 $g(-1)+g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

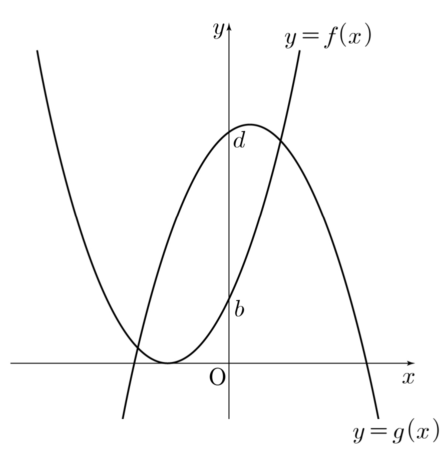
15. [출제의도] 항등식 문제 해결하기

(가), (나)에 의하여,
$4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$ 이다.
ⅰ) 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $b=0$
ⅱ) 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a=3$
따라서 $4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$
$\qquad\qquad\qquad\quad=x(x+1)(x+2)$
항등식의 성질에 의하여 $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ 이다.
조건 (가)에 의해 $g(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2$ 이다.
따라서 $g(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는 $g(4)=24$ 이다.

[다른 풀이]

(가), (나)에 의하여,
$4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$ 이다.
ⅰ) 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $b=0$
ⅱ) 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $a=3$
따라서 $4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$
$\qquad\qquad\qquad\quad=x(x+1)(x+2)$
양변에 $x=4$ 를 대입하면
$80f(4)=120$ 이므로
$f(4)=\frac{3}{2}$ 이고, $g(4)=16f(4)=24$ 이다.

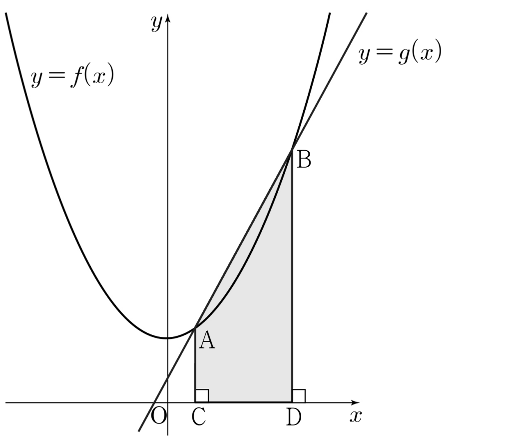
16. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계 추론하기



ㄱ. $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로
방정식 $f(x)=0$ 의 판별식 $D=a^2-4b=0$ 이다.

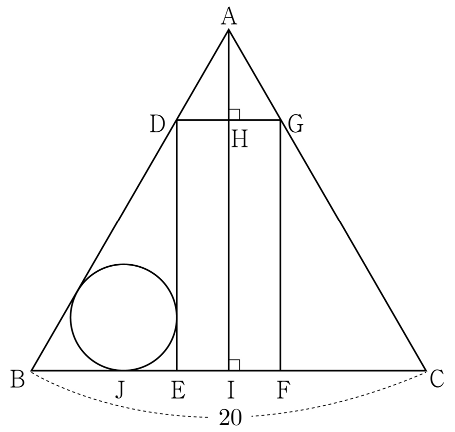
ㄴ. ㄱ에 의하여 $b=\frac{a^2}{4}$ 이므로 $a^2-4d=4b-4d$ 이다.
$b-d<0$ 이므로 $a^2-4d<0$ 이다.
ㄷ. 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $f(x)=g(x)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
$x^2+ax+b=-x^2+cx+d$
$2x^2+(a-c)x+b-d=0$ 의 판별식
$D=(a-c)^2-8(b-d)>0$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 교점 이해하기



두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면
$x^2+n^2=2nx+1$, $x^2-2nx+n^2-1=0$이고
$x=n-1$ 또는 $x=n+1$이다.
따라서
점 $\mathrm{A}(n-1,\ 2n^2-2n+1)$, $\mathrm{B}(n+1,\ 2n^2+2n+1)$
라 하면 $\mathrm{C}(n-1,\ 0)$, $\mathrm{D}(n+1,\ 0)$이다.
사각형 ACDB의 넓이는
$\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(4n^2+2)\times 2=4n^2+2$이다.
따라서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n은
$4n^2+2=66$, $n^2=16$이므로 $n=4$이다.

18. [출제의도] 이차함수의 최댓값 이해하기



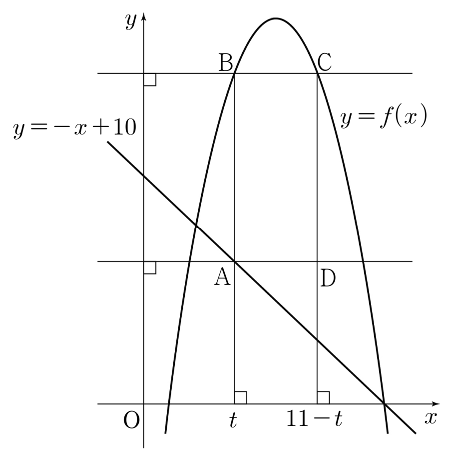
점 A에서 선분 DG, 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 원과 선분 BC와의 교점을 J라 하자.
선분 DH의 길이를 $a\,(0<a<10)$라 하면 선분 AH의 길이는 $\sqrt{3}a$이고 선분 DE의 길이는 $10\sqrt{3}-\sqrt{3}a$이다.
직사각형 DEFG의 넓이를 S라 하면
$S=2a(10\sqrt{3}-\sqrt{3}a)=-2\sqrt{3}(a-5)^2+50\sqrt{3}$
따라서 $a=5$일 때 직사각형 DEFG의 넓이는 최대이다.
원의 반지름의 길이를 b라 하면
$\overline{\mathrm{EI}}=a$, $\overline{\mathrm{JE}}=b$, $\overline{\mathrm{BJ}}=\sqrt{3}b$이므로
$a+(1+\sqrt{3})b=10$이다.
$a=5$일 때 $b=\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$ 이므로 원의 둘레는
$5(\sqrt{3}-1)\pi$이다.
p, q는 유리수이므로 $p=5$, $q=-5$이고
$p^2+q^2=50$이다.

19. [출제의도] 이차함수를 이용한 문제 해결하기

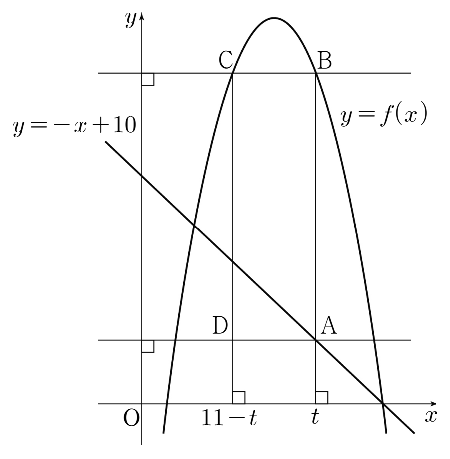
$f(x)=x^2-x+k$라 하면
방정식 $f(x)=x+1$의 두 실근이 $x=\alpha$, β이므로
$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은
$\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{C}(\beta,\ f(\beta))$에서 만난다.
직선 $y=x+1$의 기울기는 1이므로 삼각형 ABC는 직각 이등변삼각형이며 $f(\alpha)=\alpha+1$, $f(\beta)=\beta+1$이다.
삼각형의 넓이는 $(\beta-\alpha)^2\times\frac{1}{2}=8$이고, $\alpha<\beta$이므로 $\beta-\alpha=4$이다.
한편, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2$이므로
$\alpha=-1, \beta=3$이다.
따라서 $k=-2$이므로 $f(x)=x^2-x-2$,
$f(6)=6^2-6-2=28$이다.

20. [출제의도] 이차함수의 최댓값, 최솟값 추론하기

이차방정식 $-x^2+11x-10=-x+10$의 근은
$x=2$, 10이므로 두 점 $(2,\ 8)$과 $(10,\ 0)$에서 두 그래프가 만난다.
$\mathrm{A}(t,\ -t+10)$, $\mathrm{B}(t,\ -t^2+11t-10)$
라 하면 선분 AB의 길이는
$-t^2+11t-10-(-t+10)=-t^2+12t-20$이다.
i) $2<t<\frac{11}{2}$ 인 경우



선분 BC의 길이는 $2\times\left(\frac{11}{2}-t\right)=11-2t$이다.
직사각형 BADC의 둘레의 길이는
$2(-t^2+10t-9)=-2(t-5)^2+32$이다.
$2<t<\frac{11}{2}$에서 직사각형 BADC의 둘레의 길이의 최댓값은 32이다.
ii) $\frac{11}{2}<t<10$인 경우



선분 BC의 길이는 $2\times\left(t-\frac{11}{2}\right)=2t-11$이다.
직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
$2(-t^2+14t-31)=-2(t-7)^2+36$이다.
$\frac{11}{2}<t<10$에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.

21. [출제의도] 나머지정리 이해하기

(가)에 의하여 $f(x)$를 $x+2$, x^2+4로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라고 하면 나머지가 $3p^2$으로 같으므로
$f(x)=(x+2)Q_1(x)+3p^2$
$\quad=(x^2+4)Q_2(x)+3p^2$이다.
사차항의 계수가 1인 $f(x)$에서는 $Q_1(x)$는 x^2+4를 인수로 갖고 $Q_2(x)$는 $x+2$를 인수로 가져야 하므로
$Q_1(x)$와 $Q_2(x)$의 공통인수를 $x+a$라 하면
$f(x)=(x+2)(x^2+4)(x+a)+3p^2$이다.
(나)에 의하여 $f(1)=f(-1)$이므로 $a=-2$이고
$f(x)=x^4-16+3p^2$이다.
(다)에 의하여 $f(\sqrt{p})=0$이므로
$p^2+3p^2-16=0$, $p^2=4$이다.
따라서 p는 양수이므로 $p=2$이다.

22. [출제의도] 복소수 계산하기

$i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5=i-2-3i+4+5i=2+3i$
따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $3a+2b=12$이다.

23. [출제의도] 다항식 계산하기

$(3x+ay)^3=27x^3+27ax^2y+9a^2xy^2+a^3y^3$에서
x^2y의 계수는 $27a$이다.
따라서 $a=2$이다.

24. [출제의도] 인수분해를 이용하여 문제 해결하기

x^3+1을 $x-3$으로 나누었을 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 하면
$x^3+1=(x-3)Q(x)+R$이다.
$x=3$을 대입하면 $R=27+1=28$이다.
$x=2020$를 대입하면
$2020^3+1=2017Q(2020)+28$이다.
$(2020+1)(2020^2-2020+1)=2020^3+1$이므로
$(2020+1)(2020^2-2020+1)$를 2017로 나누었을 때 나머지는 28이다.

25. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$f(x)+2$는 $x+2$로 나누어떨어지므로
$f(x)+2=(x+2)(x+k)$ (k는 상수) …… ㉠
라 할 수 있다.
$f(x)-2$는 $x-2$로 나누어떨어지므로 $f(2)=2$이다.
㉠의 식에 $x=2$를 대입하면
$f(2)+2=4(2+k)$이므로 $k=-1$이다.
$f(x)=(x+2)(x-1)-2$이므로
$f(10)=106$이다.

26. [출제의도] 이차방정식 이해하기

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면,
$\alpha+\beta=16$이다.
$f(2020-8x)=0$의 두 근을 α', β'이라 하면
$2020-8\alpha'=\alpha$, $2020-8\beta'=\beta$
$\alpha'=\frac{2020-\alpha}{8}$, $\beta'=\frac{2020-\beta}{8}$
$f(2020-8x)=0$의 두 근의 합 $\alpha'+\beta'$은
$\alpha'+\beta'=505-\frac{1}{8}(\alpha+\beta)=505-2=503$

27. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제 해결하기

A의 x좌표를 α, B의 x좌표를 β라고 하자.

α, β는 $x^2-x-k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-k$이다.
$\alpha>0$, $\beta<0$이므로
$S_1=\frac{1}{2}\alpha^3$, $S_2=-\frac{1}{2}\beta^3$이다.
$S_1-S_2=\frac{1}{2}(\alpha^3+\beta^3)=20$이고
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=40$이다.
$\alpha+\beta=1$에서 $\alpha\beta=-13$이므로 $k=13$

28. [출제의도] 이차함수 추론하기

$f(x)=-x^2+px-q=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{p^2}{4}-q$
(가)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 $\frac{p^2}{4}-q=0$이다.
따라서 $q=\frac{p^2}{4}$, $f(x)=-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$
$f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 $\frac{p}{2}$이므로
(나)에 의하여 $-p\le x\le p$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(-p)$이다.
$f(-p)=-\frac{9p^2}{4}=-54$이고 $p^2=24$이다.
$q=\frac{p^2}{4}$이므로 $q=6$이고, 따라서 $p^2+q^2=60$이다.

29. [출제의도] 이차방정식의 근 이해하기

꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고 $\overline{\mathrm{JL}}=x\ (x>0)$라 하자.
$\triangle$EJI는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{EL}}=x$이고
$\triangle$EJI의 넓이는 x^2이다.
$\overline{\mathrm{AJ}}=1-x$이므로 $\triangle$AKJ의 넓이는 $\frac{(1-x)^2}{2}$이다.
$\triangle$AKJ의 넓이가 $\triangle$EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배이므로
$\frac{(1-x)^2}{2}=\frac{3}{2}x^2$, $2x^2+2x-1=0$이고,
$x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\ (x>0)$이다.
$\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{2}k$이고,
$\overline{\mathrm{OE}}=\overline{\mathrm{OL}}+\overline{\mathrm{EL}}=1+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
이므로 $\sqrt{2}k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$이다.
$k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$이므로 $p=q=\frac{1}{4}$이고
$100(p+q)=50$이다.

30. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m=\{i^n+(-i)^{2n}\}^m=\{i^n+(-1)^n\}^m$
$f(n)=i^n+(-1)^n$이라 하자.
i) $n=4k-3$ (k는 자연수)일 때
$f(n)=i-1$이고
$\{f(n)\}^4=-2^2$, $\{f(n)\}^{12}=-2^6$, $\{f(n)\}^{20}=-2^{10}$, $\cdots$
이므로 순서쌍 (m,n)은
$(4,n)$, $(12,n)$, $(20,n)$, $(28,n)$, $(36,n)$, $(44,n)$
6개이다.
이때 50 이하의 자연수 $n=1,\ 5,\ 9,\ \cdots,\ 45,\ 49$는 13개이므로 만족하는 순서쌍 (m,n)의 개수는 78개이다.
ii) $n=4k-1$ (k는 자연수)일 때
$f(n)=-i-1$이고
$\{f(n)\}^4=-2^2$, $\{f(n)\}^{12}=-2^6$, $\{f(n)\}^{20}=-2^{10}$, $\cdots$
이므로 순서쌍 (m,n)은
$(4,n)$, $(12,n)$, $(20,n)$, $(28,n)$, $(36,n)$, $(44,n)$
6개이다.
이때 50 이하의 자연수 $n=3,\ 7,\ 11,\ \cdots,\ 47$은 12개이므로 만족하는 순서쌍 (m,n)의 개수는 72개이다.
iii) $n=4k-2$, $n=4k$ (k는 자연수)일 때
$f(n)$은 0 또는 2이므로 $\{f(n)\}^m\ge 0$이다.
따라서 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 (m,n)은 존재하지 않는다.
따라서 50 이하의 자연수 m, n에 대하여
$\left\{i^n+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n}\right\}^m$이 음의 실수인 순서쌍 (m,n)의 개수는 150이다.