정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	②	3	③	4	④	5	④
6	⑤	7	①	8	①	9	②	10	②
11	⑤	12	④	13	④	14	①	15	⑤
16	②	17	①	18	④	19	③	20	⑤
21	②	22	4	23	11	24	20	25	8
26	80	27	16	28	45	29	24	30	110

해 설

1. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

2. [출제의도] 로그 계산하기

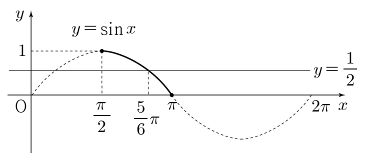
$\log_4 2+\log_4 8=\log_4(2\times 8)=\log_4 16=\log_4 4^2=2$

3. [출제의도] 부채꼴의 중심각의 크기 계산하기

부채꼴의 호의 길이를 l, 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면, $l=r\theta$이므로 $6\pi=8\theta$이다.

그러므로 $\theta=\frac{3}{4}\pi$이다.

4. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기



$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때,

함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{5}{6}\pi$이다. 따라서 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해는 $x=\frac{5}{6}\pi$이다.

5. [출제의도] 상용로그표 이해하기

수	···	2	3	4	···
⋮		⋮	⋮	⋮	
3.0	···	.4800	.4814	.4829	···
3.1	···	.4942	.4955	.4969	···
3.2	···	.5079	.5092	.5105	···
3.3	···	.5211	.5224	.5237	···

상용로그표에서 $\log 3.24=0.5105$이므로,
$\log 32.4=\log(3.24\times 10)=1+\log 3.24=1.5105$
이다.

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 함숫값 계산하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$이다.

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$이다.

그러므로 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$이다.

7. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)=2+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$은 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값이 감소하므로 $x=-1$일 때 최댓값을 갖는다. $f(-1)=2+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=2+9=11$이므로 최댓값은 11이다.

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_2(x-a)+1$이다.
이 함수의 그래프가 점 $(9,3)$을 지나므로
$3=\log_2(9-a)+1$에서 $2=\log_2(9-a)$이다.
따라서 $9-a=4$이고 $a=5$이다.

9. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용해서 로그함수가 포함된 방정식 이해하기

함수 $y=2^x-1$의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=-1$이므로 y축과의 교점의 좌표는 $(0,-1)$이다.
따라서 함수 $y=\log_2(x+k)$의 그래프는
점 $(0,-1)$을 지난다.

그러므로 $-1=\log_2 k$이고 $k=\frac{1}{2}$이다.

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

주어진 삼각함수 $y=a\sin bx+c\,(a>0,\ b>0)$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이므로
$a+c=3$, $-a+c=-1$
에서 $a=2$, $c=1$이다.
한편, 주어진 그래프에서 삼각함수의 주기가
$\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi=\pi$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$이고 $b=2$이다.
따라서 $a+b+c=5$이다.

11. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

방정식 $8^x=18$에서

$x=\log_8 18=\log_{2^3}(2\times 3^2)=\frac{1}{3}log_2(2\times 3^2)$

$=\frac{1}{3}(1+2\log_2 3)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}log_2 3$

따라서 $k=\frac{2}{3}$이다.

12. [출제의도] 지수함수가 포함된 부등식 이해하기

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$ …… ㉠
주어진 부등식은 $t^2-10t+16\le 0$이다.
$(t-2)(t-8)\le 0$에서 $2\le t\le 8$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $2\le t\le 8$이고 $2^x=t$이므로
$2\le 2^x\le 8$, 즉 $1\le x\le 3$이다.
따라서 모든 자연수 x의 값의 합은 6이다.

13. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$4.8-1.3=-2.5\log\left(\frac{L}{kL}\right)$이므로

$3.5=-2.5\log\frac{1}{k}$이다. 따라서 $3.5=2.5\log k$

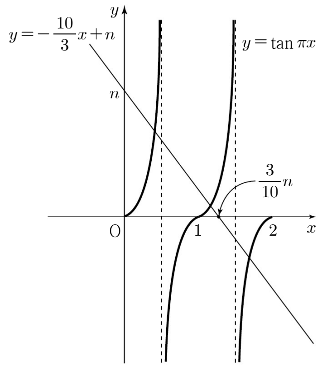
이고 $\log k=\frac{7}{5}$이므로 $k=10^{\frac{7}{5}}$이다.

14. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계 이해하기

함수 $y=3^x-a$의 역함수의 그래프가
두 점 $(3,\log_3 b)$, $(2b,\log_3 12)$를 지나므로
함수 $y=3^x-a$의 그래프는 두 점 $(\log_3 b,3)$, $(\log_3 12,2b)$를 지난다.
따라서 $3=3^{\log_3 b}-a$, $2b=3^{\log_3 12}-a$이다.
$3=b-a$, $2b=12-a$에서 $a=2$이고 $b=5$이다.
그러므로 $a+b=7$이다.

15. [출제의도] 삼각함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 찾는 문제 해결하기

$y=\tan\pi x$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이다.



위의 그림과 같이 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=\tan\pi x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{10}{3}x+n$이 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 직선 $y=-\frac{10}{3}x+n$의 x절편 $\frac{3}{10}n$이 2보다 작거나 같아야 한다. 즉 $\frac{3}{10}n\le 2$이므로 $n\le\frac{20}{3}$이다. 따라서 자연수 n의 최댓값은 6이다.

16. [출제의도] 로그함수 문제 해결하기

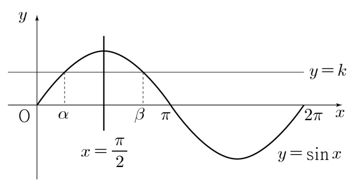
두 양수 a, b에 대하여 $\mathrm{A}(a,\log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\log_2 b)$라 하자. 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{\log_2 a+\log_2 b}{2}\right)$가 x축 위에 있으므로 $\frac{\log_2 a+\log_2 b}{2}=0$이다.
따라서 $\log_2 ab=0$이고 $ab=1$이다.
선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점
$\left(\frac{b-2a}{1-2},\frac{\log_2 b-2\log_2 a}{1-2}\right)$가 y축 위에 있으므로
$\frac{b-2a}{1-2}=0$이고 $b=2a$이다.

따라서 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\sqrt{2}$이고

$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$이다.

그러므로 선분 AB의 길이는 $\frac{\sqrt{6}}{2}$이다.

17. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기



함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표 α, β에 대하여
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}$, 즉 $\alpha+\beta=\pi$이므로 $\beta=\pi-\alpha$이다.
$\frac{\beta-\alpha}{2}=\frac{(\pi-\alpha)-\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{5}{7}$

따라서 $k^2=\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$

이므로 $k=\frac{2\sqrt{6}}{7}$ 이다.

18. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 부채꼴의 넓이 증명하기

삼각형 OAM에서 $\angle \mathrm{OMA}=\frac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{AOM}=\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{MA}}=\boxed{\sin\frac{\theta}{2}}$

이다. 한편, $\angle \mathrm{OAM}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MP}}$ 이므로

$\angle \mathrm{AMP}=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\boxed{\theta}$

이다. 같은 방법으로

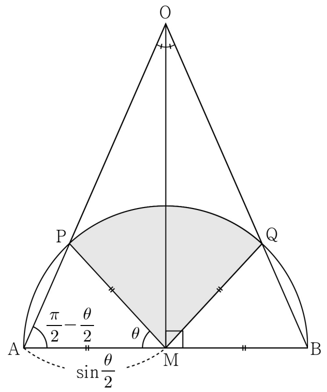
$\angle \mathrm{OBM}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{MB}}=\overline{\mathrm{MQ}}$ 이므로

$\angle \mathrm{BMQ}=\boxed{\theta}$

이다. 따라서 부채꼴 MPQ의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\boxed{\pi-2\theta}$

이다.



따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 식은 각각

$f(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}$, $g(\theta)=\theta$, $h(\theta)=\pi-2\theta$ 이므로

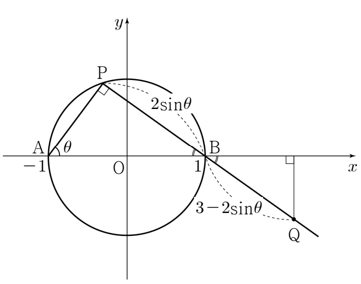
$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$, $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

이다. 따라서

$\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)\times g\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$

이다.

19. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 삼각함수의 값 구하는 문제 해결하기



$\angle \mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle \mathrm{PBA}=\frac{\pi}{2}-\theta$이고,

$\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=3-2\sin\theta$ 이다.

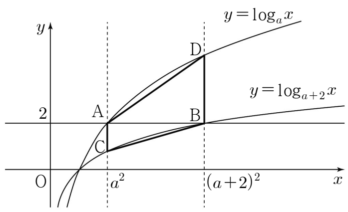
따라서 점 Q의 x좌표는

$$1+\overline{\mathrm{BQ}}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=1+(3-2\sin\theta)\sin\theta$$
$$=1+3\sin\theta-2\sin^2\theta$$
$$=-2\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$$

이므로 $\sin\theta=\frac{3}{4}$ 일 때 최대이다.

그러므로 $\sin^2\theta=\frac{9}{16}$ 이다.

20. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 명제 증명하기



ㄱ. 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=2$가 점 A에서 만나므로 $\log_a x=2$이고 $x=a^2$이다. (참)

ㄴ. $\mathrm{A}(a^2, 2)$, $\mathrm{C}(a^2, \log_{a+2}a^2)$에서

$1=\overline{\mathrm{AC}}=2-\log_{a+2}a^2$ 이므로 $\log_{a+2}a^2=1$ 이다.

$a+2=a^2$, $a^2-a-2=0$ 에서

$a=-1$ 또는 $a=2$ 이고

$a>1$ 이므로 $a=2$ 이다. (참)

ㄷ. $\mathrm{A}(a^2, 2)$, $\mathrm{B}((a+2)^2, 2)$, $\mathrm{C}(a^2, \log_{a+2}a^2)$, $\mathrm{D}((a+2)^2, \log_a(a+2)^2)$ 에서

$\log_a(a+2)=t$ 라 하면

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}}{\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}}$$
$$=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$$
$$=\frac{2\log_a(a+2)-2}{2-2\log_{a+2}a}$$
$$=\frac{\log_a(a+2)-1}{1-\log_{a+2}a}$$
$$=\frac{t-1}{1-\frac{1}{t}}$$
$$=\frac{t(t-1)}{t-1}$$
$$=t$$
$$=\log_a(a+2) \text{ (참)}$$

21. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수 추측하기

방정식 $\sin^2(4x)-1=0$에서 $\sin 4x=1$ 또는 $\sin 4x=-1$ 이다. 따라서 $0<x<\frac{n}{12}\pi$ 에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수가 33이어야 한다.

함수 $y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 이다.

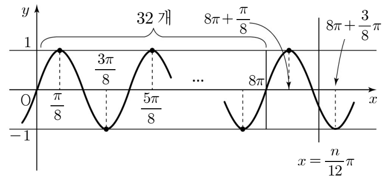
$0<x\le\frac{\pi}{4}$ 에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수가 1이고,

$\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프와 직선 $y=-1$이 만나는 점의 개수가 1이므로

$0<x\le\frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수가 2이다. 따라서 $0<x\le\frac{\pi}{2}\times16$ 에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수가 $2\times16=32$ 이다.

그러므로 $0<x<\frac{n}{12}\pi$ 에서

방정식 $\sin^2(4x)-1=0$의 실근의 개수가 33이기 위해 $8\pi<x<\frac{n}{12}\pi$ 에서 함수 $y=\sin 4x$의 그래프가 두 직선 $y=1$, $y=-1$과 만나는 점의 개수가 각각 1, 0이어야 한다.



따라서

$8\pi+\frac{\pi}{8}<\frac{n}{12}\pi\le8\pi+\frac{3}{8}\pi$

이고 $97.5<n\le100.5$

이다. 그러므로 구하는 자연수 n의 값은 98, 99, 100이고 합은 297이다.

22. [출제의도] 지수 계산하기

$2^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=4$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식 이해하기

방정식 $\log_2(x+5)=4$에서 $x+5=2^4$이다.

$x=16-5$이므로 $x=11$이다.

24. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 함숫값 계산하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$를 대입하면 주어진 방정식은

$$2\cos^2\theta-\sin^2\theta=2(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta$$
$$=2-3\sin^2\theta=1$$

이다. 따라서 $\sin^2\theta=\frac{1}{3}$ 이므로 $60\sin^2\theta=20$이다.

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=k\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+10=k\cos x+10$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 14\right)$를 지나므로

$14=k\cos\frac{\pi}{3}+10$ 이고 $14=\frac{1}{2}k+10$ 이다.

따라서 $k=8$이다.

26. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

조건 (가)에서 $\log_4 a=2$이므로 $a=16$이다.

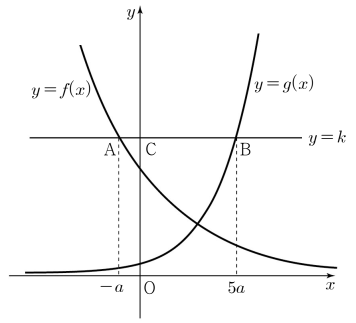
조건 (나)에서

$(\log_a 5)(\log_5 b)=\frac{\log 5}{\log a}\times\frac{\log b}{\log 5}=\frac{\log b}{\log a}=\log_a b$

이므로 $\log_a b=\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $b=a^{\frac{3}{2}}=16^{\frac{3}{2}}=4^3=64$이므로 $a+b=80$이다.

27. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 식의 값 구하기



양수 a에 대하여 점 A의 x좌표를 $-a$라 하면 점 B의 x좌표는 $5a$이다.
따라서 $f(-a)=g(5a)$이므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-a-1}=4^{5a-1}$이다.
$2^{a+1}=2^{10a-2}$이므로
$a+1=10a-2$이고 $a=\frac{1}{3}$이다.

점 $(5a, k)$를 $y=g(x)$에 대입하면 $k=4^{\frac{2}{3}}$이고
$k^3=\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3=4^2=16$이다.

28. [출제의도] 지수와 로그 문제 해결하기

집합 A의 자연수인 원소는 다음과 같다.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	⋯
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯

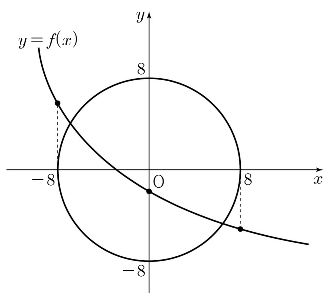
그리고 집합 B의 자연수인 원소는 다음과 같다.

b	3	9	27	81	⋯
$\log_{\sqrt{3}}b$	2	4	6	8	⋯

따라서 $n(C)=3$이므로 $C=\{2, 4, 6\}$이다.
$8\notin C$이므로 자연수 k의 범위는 $36\le k<81$이고 k의 개수는 $81-36=45$이다.

29. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 로그함수가 포함된 부등식 문제 해결하기

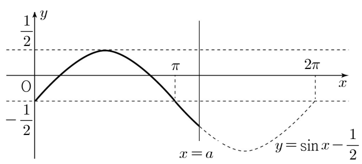
x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 조건 (가)와 (나)를 만족하기 위해서는 두 교점이 제2사분면과 제4사분면에 각각 한 개씩 존재해야 한다.



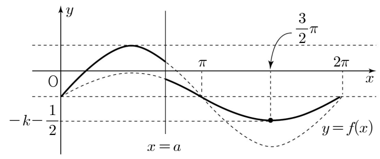
따라서
$-8<f(0)<8$, $f(-8)>0$, $f(8)<0$
이다.
(i) $-8<f(0)<8$
$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}(-7+k)+2$이므로
$-8<2\log_{\frac{1}{2}}(-7+k)+2<8$에서
$\frac{57}{8}<k<39$이다.
(ii) $f(-8)>0$
$f(-8)=2\log_{\frac{1}{2}}(-15+k)+2$이므로
$2\log_{\frac{1}{2}}(-15+k)+2>0$에서
$k<17$이다.
(iii) $f(8)<0$
$f(8)=2\log_{\frac{1}{2}}(1+k)+2$이므로
$2\log_{\frac{1}{2}}(1+k)+2<0$에서
$k>1$이다.
(i), (ii), (iii)에 의해 $\frac{57}{8}<k<17$이다.
따라서 k의 최댓값 $M=16$, 최솟값 $m=8$이므로 $M+m=24$이다.

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용해서 삼각함수 추측하기

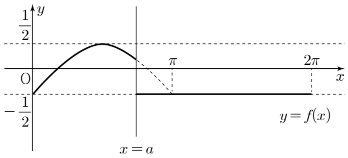
$\pi<a<2\pi$라 하면 함수 $y=\sin x-\frac{1}{2}$의 그래프에서
$\pi<x<a$일 때 $\sin x-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$이므로
$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$이다. 따라서 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



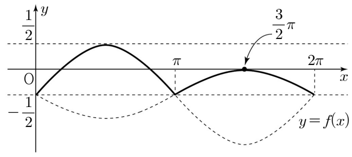
따라서 $0<a\le\pi$이다. ······㉠
(i) $k>0$인 경우
$a\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=k\sin x-\frac{1}{2}$은 $x=\frac{3}{2}\pi$일 때 최솟값 $k\sin\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}=-k-\frac{1}{2}$을 갖는다.



따라서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $k+\frac{1}{2}$이고,
$k+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ii) $k=0$인 경우
함수 $f(x)=\begin{cases}\sin x-\frac{1}{2} & (0\le x<a)\\ -\frac{1}{2} & (a\le x\le 2\pi)\end{cases}$이고
방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 2 이하이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

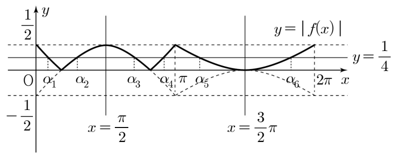


(iii) $k<0$인 경우
$0<a<\pi$이면 $\sin a>0$이므로
$f(a)=k\sin a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$이다.
따라서 $|f(a)|>\frac{1}{2}$이고 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 ㉠에 의해 $a=\pi$이다.
조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$이다.



즉 $k\times(-1)-\frac{1}{2}=0$이므로 $k=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 함수 $f(x)$는
$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\frac{1}{2} & (0\le x<\pi)\\ -\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2} & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$
이다.
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6이라고 하자.



$\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_5+\alpha_6}{2}=\frac{3\pi}{2}$이므로
$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=\pi+\pi+3\pi=5\pi$
이다. 따라서
$20\left(\frac{a+S}{\pi}+k\right)=20\left(\frac{\pi+5\pi}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=20\times\frac{11}{2}=110$
이다.