정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	③	2	⑤	3	①	4	④	5	①
6	②	7	⑤	8	②	9	④	10	③
11	③	12	⑤	13	①	14	④	15	①
16	③	17	④	18	②	19	①	20	②
21	②	22	96	23	60	24	16	25	13
26	5	27	12	28	327	29	120	30	48

가형 해설

1. [출제의도] 로그 계산하기

$4^{\log_2 3} = 3^{\log_2 4} = 3^2 = 9$

2. [출제의도] 삼각함수 계산하기

$\tan\frac{4}{3}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$\frac{3n^2 - n}{n^2+1} < na_n < \frac{3n^2+2n}{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{n^2+1} \le \lim_{n\to\infty} na_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{n^2+1} = 3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+1} = 3$

따라서 $\lim_{n\to\infty} na_n = 3$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

$\mathrm{P}(A^C) = \mathrm{P}(B) = \frac{2}{5}$ 에서

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$

5. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)$의 주기가 4π 이므로

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{b} = 4\pi$ 에서 $b = \frac{1}{2}$

최솟값이 -1 이므로 $-|a| + 3 = -1$ 에서 $a = 4$

따라서 $a + b = \frac{9}{2}$

6. [출제의도] 로그함수의 극한 계산하기

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{\ln(x^2+x+1)}$

$= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+x}{\ln(x^2+x+1)}\times\frac{x^2+4x}{x^2+x}\right\}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\ln(x^2+x+1)}\times\lim_{x\to 0}\frac{x(x+4)}{x(x+1)}$

$= 1\times 4 = 4$

7. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

삼각형 ABC 의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이므로

$\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}\times\sin\theta = \sqrt{6}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$

$\angle A$ 는 예각이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{6}{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

8. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum_{n=1}^{12}\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{12}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

$= \sum_{n=1}^{12}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) = \frac{4}{27}$

9. [출제의도] 조건부 확률 이해하기

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 눈의 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자.

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 A는 두 수 a, b가 모두 홀수인 사건의 여사건이므로

$n(A) = 36 - 3\times 3 = 27$

$\mathrm{P}(A) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

$A\cap B$는 두 수 a, b가 모두 짝수인 사건이므로

$n(A\cap B) = 3\times 3 = 9$

$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{1}{3}$

10. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{8},\ 1 + \frac{\pi}{2}\right)$ 이고

$f'(x) = 2\sec^2 2x$ 이므로 $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선의 방정식은

$y = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 1 + \frac{\pi}{2} = 4x + 1$

따라서 접선의 y 절편은 1

11. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 추론하기

$a_1 = 1$

$a_2 = 2^1 = 2$

$a_3 = \log_2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$

$a_4 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$a_5 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1$

$\vdots$

$a_{12} = a_8 = a_4 = \sqrt{2}$, $a_{13} = a_9 = a_5 = a_1 = 1$

따라서 $a_{12}\times a_{13} = \sqrt{2}$

12. [출제의도] 치환적분 이해하기

$f'(x) = \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$ 이므로

$f(x) = \int\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx$ 에서

$x - 1 = t$ 로 치환하면 $1 = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$\int\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx = \int\frac{3t-1}{\sqrt{t}}dt$

$= \int\left(3t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$

$= 2t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C$ (C는 적분상수)

$= 2(x-1)^{\frac{3}{2}} - 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C$

$f(5) = 12 + C,\ f(2) = C$

따라서 $f(5) - f(2) = 12$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$가 점 P 에서 만나므로 $2^x + 1 = 2^{x+1}$ 에서 $2^x = 1$

$x = 0$ 이므로 교점 P 의 좌표는 P$(0,\ 2)$

서로 다른 두 점 A, B 의 중점이 P 이므로

점 $\mathrm{A}(a,\ 2^a + 1)$, $\mathrm{B}(b,\ 2^{b+1})$ 에서

$\frac{a+b}{2} = 0$, $\frac{2^a + 1 + 2^{b+1}}{2} = 2$

$\frac{2^a + 1 + 2^{-a+1}}{2} = 2$

$4^a - 3\times 2^a + 2 = 0$

$(2^a - 1)(2^a - 2) = 0$

$2^a = 1$ 또는 $2^a = 2$

$a = 0$ 또는 $a = 1$

$a = 0$ 이면 $b = 0$ 이므로 모순이다.

그러므로 $a = 1$, $b = -1$

A$(1,\ 3)$, B$(-1,\ 1)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$

14. [출제의도] 정규분포의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\mathrm{P}(Y \le m+4) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{4-m}{\sigma}\right) = 0.3085$

$\mathrm{P}\left(Z \le -\frac{1}{2}\right) = 0.3085$

$\frac{4-m}{\sigma} = -\frac{1}{2}$ … ㉠

$\mathrm{P}(X \le 8) + \mathrm{P}(Y \le 8) = 1$ 에서

$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{8-m}{2}\right) + \mathrm{P}\left(Z \le \frac{8-2m}{\sigma}\right) = 1$

$\frac{8-m}{2} = -\frac{8-2m}{\sigma}$

㉠에서 $-\frac{8-2m}{\sigma} = 1$ 이므로

$\frac{8-m}{2} = 1$ 이고 $m = 6$, $\sigma = 4$

$\mathrm{P}(X \le \sigma) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{4-6}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le -1)$

$= 0.1587$

15. [출제의도] 합성함수를 이용하여 문제 해결하기

점 $(2,\ 2)$가 곡선 $y = g(x)$의 변곡점이므로

$g(2) = 2$, $g''(2) = 0$

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$h''(x) = f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x)$

$h''(2) = f''(g(2))\{g'(2)\}^2 + f'(g(2))g''(2)$

$= f''(2)\{g'(2)\}^2$

$\frac{h''(2)}{f''(2)} = 4$ 이므로 $\{g'(2)\}^2 = 4$

$g(x)$가 증가함수이므로 $g'(2) = 2$

따라서 $h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)g'(2)=8$

16. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

$1 \le a \le 6$ 이면 $1 \le 7-a \le 6$

a, b, c 가 각각 6 이하의 자연수이므로 $7-a$, $7-b$, $7-c$ 는 각각 6 이하의 자연수이다.

$3 \le k \le 18$ 인 자연수 k 에 대하여 $a+b+c=k$ 를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$

즉, $a+b+c=3\times7-k$ 를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수와 같다.

그러므로 $3 \le k \le 18$ 인 자연수 k 에 대하여 $a+b+c=k$ 일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$ 와 $(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$ 일 확률 $\mathrm{P}(X=3\times\boxed{7}-k)$ 는 서로 같다.

즉, $\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=18)$

$\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(X=17)$

$\mathrm{P}(X=5)=\mathrm{P}(X=16)$

$\vdots$

$\mathrm{P}(X=10)=\mathrm{P}(X=11)$

그러므로 확률변수 X 의 평균 $\mathrm{E}(X)$ 는

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=3}^{18}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$$

$$=3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)+5\times\mathrm{P}(X=5)+\cdots+17\times\mathrm{P}(X=17)+18\times\mathrm{P}(X=18)$$

$$=(3+18)\times\mathrm{P}(X=3)+(4+17)\times\mathrm{P}(X=4)+\cdots+(10+11)\times\mathrm{P}(X=10)$$

$$=\boxed{21}\times\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)$$

이때, 확률질량함수의 성질에 의하여

$\sum_{k=3}^{18}\mathrm{P}(X=k)=1$ 이고,

$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=11}^{18}\mathrm{P}(X=k)$ 이므로

$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\boxed{\frac{1}{2}}$ 이다.

$\mathrm{E}(X)=\boxed{21}\times\boxed{\frac{1}{2}}$

$p=7$, $q=21$, $r=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{p+q}{r}=2\times(7+21)=56$

17. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

조건 (가), (나)에 의하여

$S_7=T_7$ 이고 $S_7+T_7=84$ 이므로 $S_7=42$

$S_7=T_7$ 이므로 7 이하의 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \ge 0$ … ㉠

조건 (나)에 의하여

6 이상의 모든 자연수 n 에 대하여

$(S_{n+1}+T_{n+1})-(S_n+T_n)=0$

$a_{n+1}+|a_{n+1}|=0$

$a_{n+1} \le 0$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0 \le a_7 \le 0$ 이므로 $a_7=0$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하자.

$S_7=\frac{7(2a+6d)}{2}=42$, $a_7=a+6d=0$ 에서

$a=12$, $d=-2$

$a_n=14-2n$

$S_{15}=\frac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$S_{15}+T_{15}=84$

따라서 $T_{15}=84-S_{15}=114$

18. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

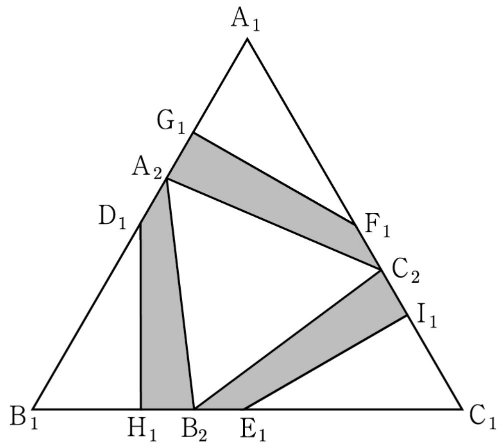


그림 R_1 에서 사각형 $\mathrm{A_2C_2F_1G_1}$ 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$

세 사각형 $\mathrm{A_2C_2F_1G_1}$, $\mathrm{B_2A_2D_1H_1}$, $\mathrm{C_2B_2E_1I_1}$ 의 넓이는 모두 같으므로 $S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

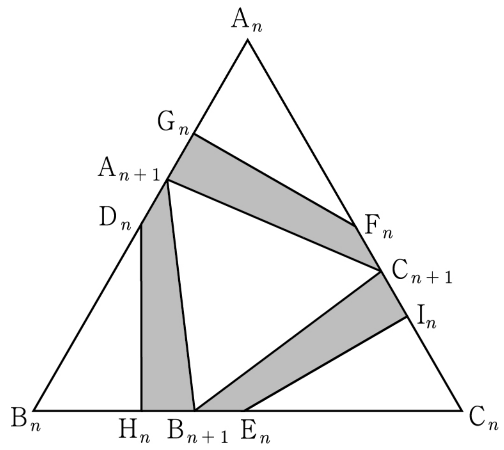


그림 R_n 에서 세 사각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{F}_n\mathrm{G}_n$, $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_n\mathrm{H}_n$, $\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{E}_n\mathrm{I}_n$ 의 넓이의 합을 T_n 이라 하자.

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 과 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ 이 닮음이므로 정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 의 한 변의 길이를 l_n 이라 하면 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_{n+1}}=\frac{5}{8}l_n$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\frac{3}{8}l_n$

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ 에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}$ 의 길이 l_{n+1} 을 구하면

$(l_{n+1})^2$

$=\left(\frac{5}{8}l_n\right)^2+\left(\frac{3}{8}l_n\right)^2-2\times\frac{5}{8}l_n\times\frac{3}{8}l_n\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{19}{64}(l_n)^2$

$l_{n+1}=\frac{\sqrt{19}}{8}l_n$ 이고 $l_n : l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{19}}{8}$

$T_n : T_{n+1}=1:\frac{19}{64}$ 이고 $T_{n+1}=\frac{19}{64}T_n$

$\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$ 이고 공비가 $\frac{19}{64}$ 인 등비수열이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{19}{64}}=\frac{112\sqrt{3}}{15}$$

19. [출제의도] 부분적분법을 이용하여 문제해결하기

$g(x)=\int_0^x \ln f(t)dt$ 에서

$g(0)=0$, $g'(x)=\ln f(x)$, $g''(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

조건 (가)에 의하여 $g(1)=2$, $g'(1)=0$

조건 (나)에 의하여 $g'(-1)=g'(1)=0$

$\int_{-1}^{1}\frac{xf'(x)}{f(x)}dx=\int_{-1}^{1}xg''(x)dx$

$=\Big[xg'(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}g'(x)dx$

$=g'(1)+g'(-1)-2\int_0^1 g'(x)dx$

$=2g'(1)-2\{g(1)-g(0)\}$

$=2\times0-2(2-0)=-4$

20. [출제의도] 여사건의 확률을 활용하여 문제해결하기

주사위를 3번 던져 첫 번째, 두 번째, 세 번째 나온 눈의 수를 각각 a, b, c 라 하고 세 수 a, b, c 의 순서쌍을 $(a,\ b,\ c)$ 라 하자.

주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$6^3=216$

주어진 조건을 만족시키지 않는 경우는 빈 접시가 생기는 경우이다.

(i) 빈 접시가 1개인 경우

예를 들어, 1이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는

$(3,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 5,\ 5)$, $(3,\ 4,\ 5)$

인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로

$2\times\frac{3!}{2!}+3!=12$ (가지)

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 접시인 경우도 각각 12가지이다.

그러므로 $12\times6=72$

(ii) 빈 접시가 2개인 경우

빈 접시가 2개인 경우는 두 접시가 이웃하는 경우이다. 예를 들어, 1, 2가 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는

$(4,\ 4,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 5)$

인 각각의 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로

$2\times\frac{3!}{2!}=6$ (가지)

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3과 3, 4와 4, 5와 5, 6과 6, 1이 적혀 있는 접시인 경우도 각각 6가지이다.

그러므로 $6\times6=36$

(iii) 빈 접시가 3개인 경우

예를 들어, 1, 2, 3이 적혀 있는 접시가 빈 접시인 경우는

$(5,\ 5,\ 5)$

인 순서쌍의 수를 일렬로 나열하는 것과 같으므로 1가지이다.

같은 방법으로 빈 접시가 2, 3, 4와 3, 4, 5와 4, 5, 6과 5, 6, 1과 6, 1, 2가 적혀 있는 접시인 경우도 각각 1가지이다.

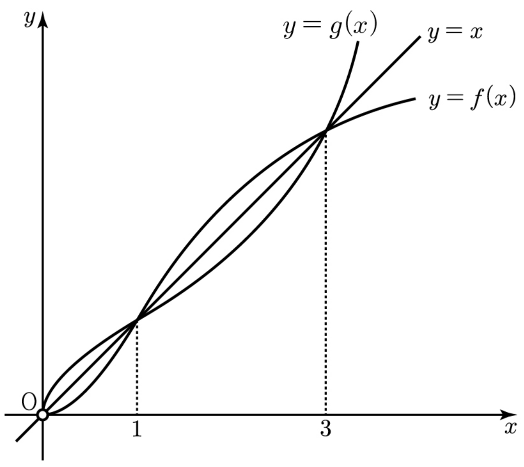
그러므로 $1\times 6=6$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 빈 접시가 생기는 경우의 수는 $72+36+6=114$
따라서 구하는 확률은 $1-\frac{114}{216}=\frac{17}{36}$

21. [출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 함수 추론하기

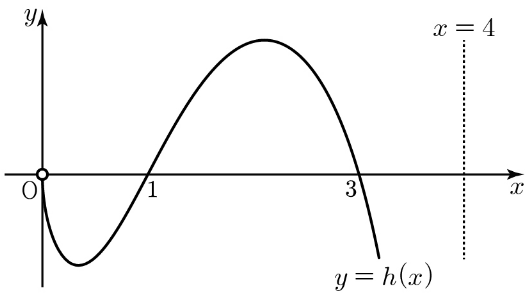
$f'(x)=\frac{8x(x^2+3)-4x^2\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{24x}{(x^2+3)^2}$
양의 실수 전체의 집합에서 $f'(x)>0$ 이므로
$f(x)$ 는 증가함수이다.
두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점은
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
$f(x)=x$ 에서
$x^3-4x^2+3x=x(x-1)(x-3)=0$ 이므로
두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점의
x 좌표는 1, 3 이다.

$f''(x)=\frac{24(x^2+3)^2-24x\times 2(x^2+3)\times 2x}{(x^2+3)^4}$
$=\frac{72(1-x)(1+x)}{(x^2+3)^3}$

곡선 $y=f(x)$ 는
열린 구간 $(0,\ 1)$ 에서 아래로 볼록하고,
열린 구간 $(1,\ \infty)$ 에서 위로 볼록하며,
변곡점은 $(1,\ 1)$ 이다.
두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프 개형은 다음과 같다.



함수 $h(x)$ 는 닫힌 구간 $[1,\ 3]$ 에서만
$h(x)\geq 0$ 이고, 함수 $h(x)$ 의 그래프 개형은 다음과 같다.



ㄱ. 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 1, 3 이므로 $f(1)=g(1)=1$
$h(1)=0$ (참)
ㄴ. 두 양수 a, b 에 대하여
$\int_a^b h(x)dx$ 의 값이 최대가 되려면
닫힌 구간 $[a,\ b]$ 에서 $h(x)\geq 0$ 이고
$b-a$ 의 값이 최대이어야 하므로 $a=1$, $b=3$
그러므로 $b-a=2$ (참)
ㄷ. $f(g(x))=x$ 에서 $f'(g(x))g'(x)=1$ 이고
$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=f'(x)-\frac{1}{f'(g(x))}$
$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}$
곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1,\ 1)$ 에서만 변곡점을 가지므로 $f''(1)=0$
$f(1)=g(1)=1$ 이므로
$g''(1)=-\frac{f''(g(1))g'(1)}{\{f'(g(1))\}^2}=-\frac{f''(1)g'(1)}{\{f'(1)\}^2}=0$
$h''(1)=f''(1)-g''(1)=0$
(ⅰ) $0<x<1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
$f''(x)>0$, $g'(x)>0$, $0<g(x)<1$ 이므로
$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}<0$
열린 구간 $(0,\ 1)$ 에서
$h''(x)=f''(x)-g''(x)>0$
(ⅱ) $1<x<4$ 인 모든 실수 x 에 대하여
$g'(x)>0$, $g(x)>1$ 이고
$x>1$ 인 모든 실수 x 에 대하여
$f''(x)<0$ 이므로
$g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2}>0$
열린 구간 $(1,\ 4)$ 에서
$h''(x)=f''(x)-g''(x)<0$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $h'(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$h''(x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{6}$	$\searrow$	

함수 $h'(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값을 갖는다.
$f'(1)=\frac{3}{2}$ 이므로
$h'(1)=f'(1)-\frac{1}{f'(g(1))}=f'(1)-\frac{1}{f'(1)}=\frac{5}{6}$
(거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

22. [출제의도] 등비수열 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면
$a_5=a_2\times r^3$ 이므로 $r^3=8$ 에서 $r=2$
따라서 $a_6=a_5\times 2=96$

23. [출제의도] 이항정리 이해하기

전개식의 일반항은
${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\,2^r x^{12-3r}$
$x^{12-3r}=x^6$ 에서 $12-3r=6$, $r=2$
따라서 x^6 의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times 2^2=60$

24. [출제의도] 이항분포의 평균과 분산 이해하기

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로
$\mathrm{E}(X)=24$, $\mathrm{V}(X)=8$
$\mathrm{E}(2X-a)=2\mathrm{E}(X)-a=48-a$
$\mathrm{V}(2X-a)=4\mathrm{V}(X)=32$ 이므로 $48-a=32$
따라서 $a=16$

25. [출제의도] 매개변수의 미분법 이해하기

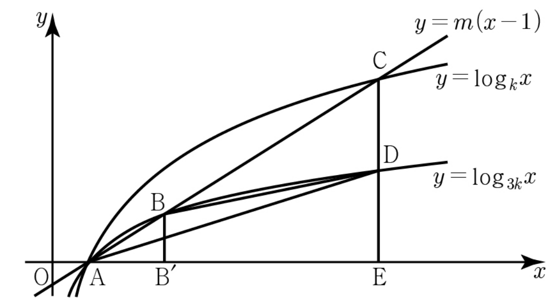
시각 t 에서의 속도는
$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(3+2\sin\pi t,\ \frac{6}{t}-2\cos\pi t\right)$ 이므로
따라서 시각 $t=\frac{1}{2}$ 에서의 속력은
$\sqrt{(3+2)^2+(12-0)^2}=13$

26. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제해결하기

α, β, γ가 삼각형 ABC 의 세 내각의 크기이므로
$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ … ㉠
α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\alpha+\gamma=2\beta$ … ㉡
㉠, ㉡에서 $3\beta=\pi$, $\beta=\frac{\pi}{3}$
$\beta=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\alpha+\gamma=\frac{2\pi}{3}$ 에서
$\cos(\alpha+\gamma)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma=-\frac{1}{2}$ … ㉢
$\cos\alpha$, $2\cos\beta$, $8\cos\gamma$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(2\cos\beta)^2=8\cos\alpha\cos\gamma$
$\cos\alpha\cos\gamma=\frac{1}{8}$ … ㉣
㉢, ㉣에서 $\sin\alpha\sin\gamma=\frac{5}{8}$ … ㉤
따라서 $\tan\alpha\tan\gamma=\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=5$

27. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제해결하기

조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB 의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC 의 넓이는 $3S$이다.
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$ 에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AB}}$ 이고
점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 B′ 이라 하면
$\overline{\mathrm{B'E}}=3\overline{\mathrm{AB'}}$ 이다.
$\overline{\mathrm{AB'}}=a$ 라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3a$ 이므로
$\mathrm{B}(a+1,\ \log_{3k}(a+1))$,
$\mathrm{C}(4a+1,\ \log_k(4a+1))$,
$\mathrm{D}(4a+1,\ \log_{3k}(4a+1))$ 이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED 의 넓이는 $4S$이고 삼각형 AEC 의 넓이는 $8S$이므로
D 는 선분 CE 의 중점이다.
$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1)$
$\frac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\frac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$
$\log_k 3k=2$ 에서 $k^2=3k$ 이므로 $k=3$
세 점 A, B, C 가 직선 $y=m(x-1)$ 위에 있으므로
$m=\frac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\frac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}$ 에서
$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1)$
$(a+1)^2=4a+1$
$a^2-2a=0$

$a>0$ 이므로 $a=2$

$m=\dfrac{\log_9 3}{2}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\dfrac{k}{m}=12$

28. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

(i) $f(3)$이 3의 배수인 경우

ⓘ $f(3)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

그러므로 $6\times 20=120$

ⓘⓘ $f(3)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

${}_1\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_3=1$

그러므로 $21\times 1=21$

ⓘ, ⓘⓘ에 의하여

$f(3)$이 3의 배수인 경우의 수는

$120+21=141$

(ii) $f(6)$이 3의 배수인 경우

ⓘ $f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

ⓘⓘ $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{H}_5={}_{10}\mathrm{C}_5=252$

ⓘ, ⓘⓘ에 의하여

$f(6)=3$인 경우의 수는 $21+252=273$

(iii) $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우

ⓘ $f(3)=f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_1\mathrm{H}_2={}_2\mathrm{C}_2=1$

그러므로 $6\times 1=6$

ⓘⓘ $f(3)=3$, $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 $6\times 10=60$

ⓘⓘⓘ $f(3)=f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

${}_1\mathrm{H}_2={}_2\mathrm{C}_2=1$

그러므로 $21\times 1=21$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에 의하여

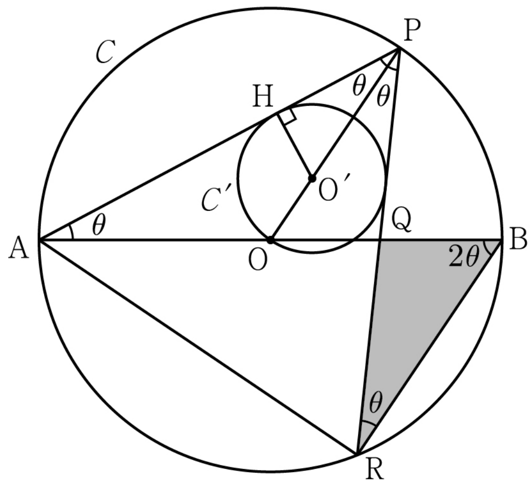
$f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우의 수는

$6+60+21=87$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $141+273-87=327$

29. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

원 C'의 중심을 O', 원 C'과 선분 PA가 만나는 점을 H라 하자.



삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{OPA}=\theta$

$r(\theta)=\overline{\mathrm{O'O}}=\overline{\mathrm{O'H}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PO'}}=2-r(\theta)$

삼각형 $\mathrm{O'PH}$에서 $\angle\mathrm{PHO'}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{O'H}}}{\overline{\mathrm{PO'}}}=\dfrac{r(\theta)}{2-r(\theta)}$

$r(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$\angle\mathrm{PRB}$는 호 BP의 원주각이므로 $\angle\mathrm{PRB}=\theta$

$\angle\mathrm{RBA}$는 호 AR의 원주각이므로 $\angle\mathrm{RBA}=2\theta$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 삼각형 ARB는 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{RB}}=4\cos 2\theta$이다.

삼각형 QRB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{RB}}}{\sin(\angle\mathrm{BQR})}=\dfrac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\sin(\angle\mathrm{RBQ})}$

$\dfrac{4\cos 2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\sin 2\theta}$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\dfrac{4\sin 2\theta\cos 2\theta}{\sin 3\theta}$

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\overline{\mathrm{RB}}\times\sin\theta$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{r(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\dfrac{8\sin\theta\sin 2\theta(\cos 2\theta)^2}{\sin 3\theta}}{\dfrac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{4\sin 2\theta(\cos 2\theta)^2(1+\sin\theta)}{\sin 3\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{4\sin 2\theta}{\sin 3\theta}\times(\cos 2\theta)^2(1+\sin\theta)\right\}$$

$$=4\times\frac{2}{3}\times 1^2\times(1+0)=\frac{8}{3}$$

따라서 $a=\dfrac{8}{3}$ 이므로 $45a=120$

30. [출제의도] 적분법을 활용하여 문제해결하기

$g'(x)=f'(x)\{ae^{af(x)}+b\}$ 이고

$g'(x)=0$ 에서

$f'(x)=0$ 또는 $ae^{af(x)}+b=0$

(i) $f'(x)=0$인 경우

$f'(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$

$x=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11$

(ii) $ae^{af(x)}+b=0$인 경우

$e^{af(x)}=-\dfrac{b}{a}$를 만족시키는 x의 값이 존재해야 하므로 $\dfrac{b}{a}<0$

조건 (나)와 (i)에 의하여 n이 짝수일 때 α_n은 방정식 $ae^{af(x)}+b=0$의 실근이다.

$ae^{af(\alpha_n)}+b=0$　　　　… ㉠

조건 (나)에 의하여 n이 짝수일 때

$e^{af(\alpha_n)}+bf(\alpha_n)=0$　　　　… ㉡

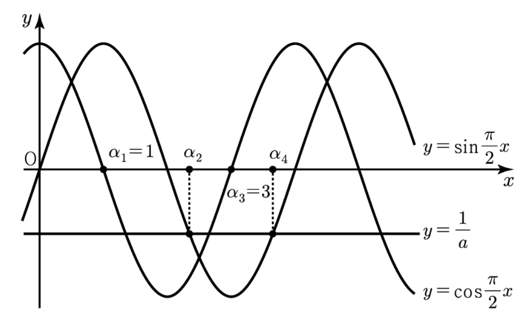
㉠, ㉡에서 $abf(\alpha_n)-b=0$이고,

$f(\alpha_n)=\dfrac{1}{a}$

n이 짝수일 때, $f(\alpha_n)=\dfrac{1}{a}$을 만족시키려면

$-1<\dfrac{1}{a}<0$

그러므로 $a<-1$, $b>0$



열린 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극소인 서로 다른 α의 개수는 2이다.

함수 $g(x)$의 열린 구간 $(0,\ 4)$에서의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	α_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	α_3	$\cdots$	α_4	$\cdots$	4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	e^a+b	↘	0	↗	$e^{-a}-b$	↘	0	↗	

함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=4$에서 극값을 갖지 않고 열린 구간 $(0,\ 12)$에서 $g(x+4)=g(x)$를 만족한다.

열린 구간 $(0,\ 12)$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수와 극솟값을 갖도록 하는 서로 다른 x의 개수는 각각 6이므로 $m=12$

함수 $g(x)$는 열린 구간 $(0,\ 4)$에서 $x=\alpha_1$과 $x=\alpha_3$일 때 각각 극댓값 e^a+b, $e^{-a}-b$를 갖는다.

함수 $g(x)$의 서로 다른 두 극댓값의 합이 e^3+e^{-3}이므로

$(e^a+b)+(e^{-a}-b)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$

a는 음수이므로 $a=-3$

$f(\alpha_2)=f(\alpha_4)=-\dfrac{1}{3}$ 이고 ㉡에 대입하면

$g(\alpha_2)=e^{-3f(\alpha_2)}+bf(\alpha_2)=e-\dfrac{1}{3}b=0$ 에서

$b=3e$

$$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$\sin\dfrac{\pi}{2}x=t$로 치환하면 $\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x=\dfrac{dt}{dx}$ 이고

$\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha_3=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$, $\sin\dfrac{\pi}{2}\alpha_4=-\dfrac{1}{3}$ 이다.

$$12\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\left\{e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right\}\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\left(e^{-3t}+3e\,t\right)dt$$

$$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3}{2}e\,t^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$$

$$=8e^3-40e$$

따라서 $p=8$, $q=-40$이므로 $p-q=48$