

제 2 교시

수학 영역 (가형)

5지선 다형

1. $4^{\log_2 3}$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

2. $\tan \frac{4}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

3. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{3n-1}{n^2+1} < a_n < \frac{3n+2}{n^2+1}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

4. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A^C) = P(B) = \frac{2}{5}$$

일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.)

[3점]

- ① $\frac{16}{25}$ ② $\frac{17}{25}$ ③ $\frac{18}{25}$ ④ $\frac{19}{25}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

5. 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = a \cos bx + 3$ 이 있다.
함수 $f(x)$ 는 주기가 4π 이고 최솟값이 -1 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x}{\ln(x^2 + x + 1)}$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = \sqrt{7}$ 인 예각삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{6}$ 이다.
 $\angle A = \theta$ 일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

8. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = 2n + 1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{12} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{4}{27}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

9. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수일 때, 나온 두 눈의 수의 합이 짝수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

10. 함수 $f(x) = \tan 2x + \frac{\pi}{2}$ 의 그래프 위의

점 $P\left(\frac{\pi}{8}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ 에서의 접선의 y 절편은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

11. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \leq 1) \\ \log_{a_n} \sqrt{2} & (a_n > 1) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{12} \times a_{13}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

12. $x > 1$ 인 모든 실수 x 의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$\sqrt{x-1} f'(x) = 3x - 4$$

를 만족시킬 때, $f(5) - f(2)$ 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

13. 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=2^{x+1}$ 의 그래프가 점 P에서 만난다. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, g(b))$ 의 중점이 P일 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

- ① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

14. 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 2^2)$, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(2m, \sigma^2)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 8) + P(Y \leq 8) = 1$$

을 만족시키는 m 과 σ 에 대하여 $P(Y \leq m+4) = 0.3085$ 일 때, $P(X \leq \sigma)$ 의 값을 오른쪽

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1359
 ④ 0.1587 ⑤ 0.2857

15. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 $g(x)$ 가 증가함수일 때, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

라 하자. 점 $(2, 2)$ 가 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점이고

$$\frac{h''(2)}{f''(2)} = 4 \text{ 이다. } f'(2) = 4 \text{ 일 때, } h'(2) \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

16. 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c 라 하자. $a+b+c$ 의 값을 확률변수 X 라 할 때, 다음은 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 를 구하는 과정이다.

$3 \leq a+b+c \leq 18$ 이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, ..., 18이다.

a, b, c 가 각각 6 이하의 자연수이므로

$7-a, 7-b, 7-c$ 는 각각 6 이하의 자연수이다.

$3 \leq k \leq 18$ 인 자연수 k 에 대하여

$a+b+c=k$ 일 확률 $P(X=k)$ 와

$(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$ 일 확률

$P(X=3 \times \boxed{\text{가}} - k)$ 는 서로 같다.

그러므로 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 는

$$E(X) = \sum_{k=3}^{18} \{k \times P(X=k)\}$$

$$= 3 \times P(X=3) + 4 \times P(X=4) + 5 \times P(X=5) \\ + \dots + 17 \times P(X=17) + 18 \times P(X=18)$$

$$= \boxed{\text{나}} \times \sum_{k=3}^{10} P(X=k)$$

이때, 확률질량함수의 성질에 의하여 $\sum_{k=3}^{18} P(X=k) = 1$ 이므로

$$\sum_{k=3}^{10} P(X=k) = \boxed{\text{다}}$$

$$\text{따라서 } E(X) = \boxed{\text{나}} \times \boxed{\text{다}}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때,

$$\frac{p+q}{r} \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 49 ② $\frac{105}{2}$ ③ 56 ④ $\frac{119}{2}$ ⑤ 63

17. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$$

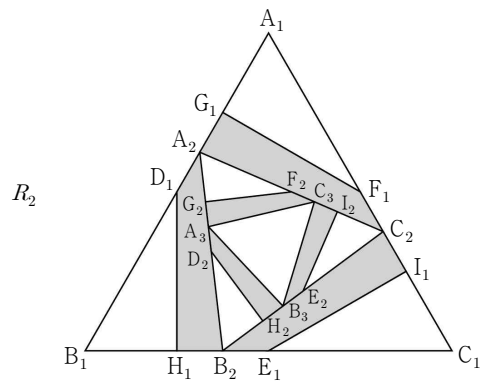
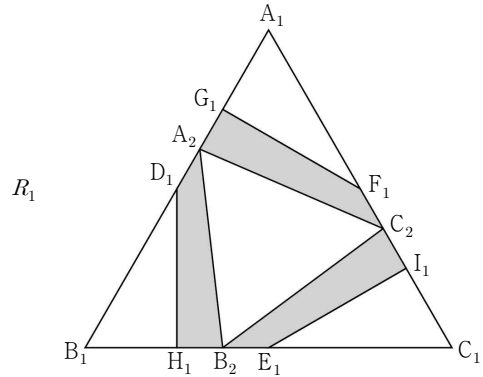
라 할 때, S_n, T_n 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $S_7 = T_7$
- (나) 6 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n + T_n = 84$ 이다.

T_{15} 의 값은? [4점]

- ① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 의 중점을 각각 D_1, E_1, F_1 이라 하고, 세 선분 A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 의 중점을 각각 G_1, H_1, I_1 이라 하고, 세 선분 G_1D_1, H_1E_1, I_1F_1 의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2 라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1, B_2A_2D_1H_1, C_2B_2E_1I_1$ 에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 삼각형 $A_2B_2C_2$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2, B_3A_3D_2H_2, C_3B_3E_2I_2$ 에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



⋮

- ① $\frac{109\sqrt{3}}{15}$ ② $\frac{112\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{23\sqrt{3}}{3}$
 ④ $\frac{118\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{121\sqrt{3}}{15}$

19. 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \int_0^x \ln f(t) dt$$

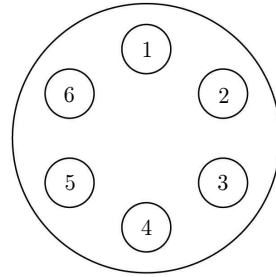
일 때, 함수 $g(x)$ 와 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값 2를 갖는다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $g'(-x) = g'(x)$ 이다.

$$\int_{-1}^1 \frac{xf'(x)}{f(x)} dx \text{의 값은? [4점]}$$

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

20. 그림과 같이 원탁 위에 1부터 6까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 접시가 놓여 있고 같은 종류의 쿠키 9개를 접시 위에 담으려고 한다. 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 적혀 있는 접시와 그 접시에 이웃하는 양 옆의 접시 위에 3개의 쿠키를 각각 1개씩 담는 시행을 한다. 예를 들어, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우 6, 1, 2가 적혀 있는 접시 위에 쿠키를 각각 1개씩 담는다. 이 시행을 3번 반복하여 9개의 쿠키를 모두 접시 위에 담을 때, 6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있을 확률은? [4점]



- ① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{17}{36}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{23}{36}$ ⑤ $\frac{13}{18}$

21. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{4x^2}{x^2+3}$ 에

대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad (0 < x < 4)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

— < 보 기 > —

ㄱ. $h(1) = 0$
 ㄴ. 두 양수 $a, b (a < b < 4)$ 에 대하여 $\int_a^b h(x)dx$ 의 값이 최대일 때, $b - a = 2$ 이다.
 ㄷ. $h(x)$ 의 도함수 $h'(x)$ 의 최댓값은 $\frac{7}{6}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_2 = 6, a_5 = 48$ 이다. a_6 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^6 의 계수를 구하시오. [3점]

24. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(36, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.
 $E(2X-a)=V(2X-a)$ 를 만족시키는 상수 a 의 값을
 구하시오. [3점]

25. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 $t(t > 0)$ 에서의 위치
 (x, y) 가

$$x = 3t - \frac{2}{\pi} \cos \pi t, \quad y = 6 \ln t - \frac{2}{\pi} \sin \pi t$$

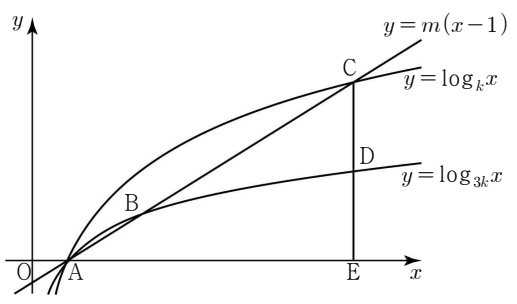
- 이다. 시간 $t = \frac{1}{2}$ 에서 점 P 의 속력을 구하시오. [3점]

26. 삼각형 ABC 에 대하여 $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ 라
 할 때, α , β , γ 가 이 순서대로 등차수열을 이루고
 $\cos \alpha$, $2\cos \beta$, $8\cos \gamma$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때,
 $\tan \alpha \tan \gamma$ 의 값을 구하시오. (단, $\alpha < \beta < \gamma$) [4점]

27. $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 두 곡선 $y = \log_{3k} x$, $y = \log_k x$ 가 만나는 점을 A 라 하자. 양수 m 에 대하여 직선 $y = m(x-1)$ 이 두 곡선 $y = \log_{3k} x$, $y = \log_k x$ 와 제1 사분면에서 만나는 점을 각각 B, C 라 하자. 점 C 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_{3k} x$, x 축과 만나는 점을 각각 D, E 라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.
- (나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

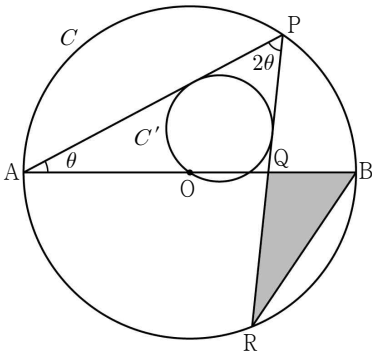
$\frac{k}{m}$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $f(3) \times f(6)$ 은 3의 배수이다.
- (나) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

29. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 원 C가 있다. 원 C 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$ 라 할 때, 선분 AB 위에 $\angle APQ = 2\theta$ 를 만족시키는 점을 Q라 하자. 직선 PQ가 원 C와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R라 할 때, 중심이 삼각형 AQP의 내부에 있고 두 선분 PA, PR에 동시에 접하는 원을 C'이라 하자. 원 C'이 점 O를 지날 때, 원 C'의 반지름의 길이를 $r(\theta)$, 삼각형 BQR의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{r(\theta)} = a$ 일 때, $45a$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



30. 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 와 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = e^{af(x)} + bf(x) \quad (0 < x < 12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ (m 은 자연수)라 할 때, m 이하의 자연수 n 에 대하여 α_n 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) n 이 홀수일 때, $\alpha_n = n$ 이다.
- (나) n 이 짝수일 때, $g(\alpha_n) = 0$ 이다.

함수 $g(x)$ 가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 $e^3 + e^{-3}$ 일 때, $m\pi \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} g(x) \cos \frac{\pi}{2}x dx = pe^3 + qe$ 이다. $p - q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 정수이다.) [4점]

* 확인 사항
 ◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.