정답 및 해설

나형 정답

1	③	2	②	3	⑤	4	③	5	⑤
6	⑤	7	①	8	①	9	④	10	④
11	②	12	③	13	④	14	⑤	15	①
16	③	17	④	18	②	19	②	20	⑤
21	④	22	21	23	7	24	15	25	30
26	10	27	169	28	12	29	72	30	37

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$32\times 2^{-3}=2^5\times 2^{-3}=2^2=4$

2. [출제의도] 등비수열 계산하기

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=3$, $a_3=ar^2=6$ 이므로 $r=2$

따라서 $\dfrac{a_2}{a_1}=r=2$

3. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+9)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+9)=9$

4. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\dfrac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{3}{4}\pi=0$

5. [출제의도] 확률의 뜻 이해하기

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$

6. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}(-2x+1)=\lim_{x\to 1+}(x^2-ax+4)=f(1)$

$-1=5-a$ 따라서 $a=6$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=0+(-1)=-1$

8. [출제의도] 함수의 극대, 극소 이해하기

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로

$f(-1)=-1+6-9+a=-6$ 따라서 $a=-2$

9. [출제의도] 이항정리 이해하기

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{r=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_r\,(x^2)^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_r\,2^r x^{12-3r}$$

$12-3r=6$, $r=2$

따라서 x^6의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times 2^2=60$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ \log_a 4)$

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(4-1)\times(2-\log_a 4)=\dfrac{9}{2}$

$\log_a 4=-1$ 따라서 $a=\dfrac{1}{4}$

11. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$\dfrac{1}{4}=1+2\sin\theta\cos\theta$, $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta}=\frac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{4}{3}$$

12. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

이 고등학교 학생 200명을 대상으로 조사한 결과이므로

$10a+b+(48-2a)+(b-8)=200$

$4a+b=80$ …… ㉠

이 고등학교 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 남학생인 사건을 X, 휴대폰 요금제 A를 선택한 사건을 Y라 하면

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\dfrac{10a}{200}}{\dfrac{10a+b}{200}}=\frac{5}{8}$$

$5(10a+b)=80a$, $b=6a$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=8$, $b=48$

따라서 $b-a=40$

13. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{OH}}^2=\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2$

$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ 이므로 $\overline{\mathrm{OP}}^2=t^2+t$

선분 PH의 길이는

점 P와 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{OH}}^2=t^2+t-\dfrac{(t-2\sqrt{t})^2}{5}=\dfrac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}$

$$\text{따라서 }\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5(t^2+t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\dfrac{4\sqrt{t}}{t}+\dfrac{1}{t}}{5+\dfrac{5}{t}}=\frac{4}{5}$$

14. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 문제 해결하기

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$은 실수$)$라 하면

$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}$

$\qquad+\cdots+a_1(-x)+a_0$ 이고

k가 홀수인 경우 $\displaystyle\int_{-3}^{3}x^k dx=0$ 이므로

$\displaystyle\int_{-3}^{3}f(-x)dx=\int_{-3}^{3}f(x)dx$

조건(가)에 의하여

$f(x)+f(-x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

이고 $f(x)+f(-x)$는 차수가 홀수인 항을 갖지 않으므로 $a=0$

조건(나)에 의하여

$f(0)+f(0)=-2=b$

그러므로 $f(x)+f(-x)=3x^2-2$

$\displaystyle\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-3}^{3}f(x)dx+\int_{-3}^{3}f(-x)dx=2\int_{-3}^{3}f(x)dx$

따라서

$$\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\{f(x)+f(-x)\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(3x^2-2)dx$$

$$=21$$

15. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 문제 해결하기

$\angle\mathrm{DCG}=\theta\ (0<\theta<\pi)$, $\angle\mathrm{BCE}=\pi-\theta$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ 이므로 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\dfrac{25}{36}$

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DG}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\theta$

$\qquad=25-24\cos\theta$

$\overline{\mathrm{BE}}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos(\pi-\theta)$

$\qquad=25-24\cos(\pi-\theta)$

$\qquad=25+24\cos\theta$

따라서 $\overline{\mathrm{DG}}\times\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{25^2-24^2\times\cos^2\theta}$

$\qquad=\sqrt{25^2-24^2\times\dfrac{25}{36}}$

$\qquad=5\sqrt{25-16}=15$

16. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

$1\le a\le 6$이면 $1\le 7-a\le 6$

a, b, c가 각각 6 이하의 자연수이므로

$7-a$, $7-b$, $7-c$는 각각 6 이하의 자연수이다.

$3\le k\le 18$인 자연수 k에 대하여

$a+b+c=k$를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$

즉, $a+b+c=3\times7-k$를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같다.

그러므로 $3\le k\le 18$인 자연수 k에 대하여

$a+b+c=k$일 확률 $\mathrm{P}(X=k)$와

$(7-a)+(7-b)+(7-c)=k$일 확률

$\mathrm{P}(X=3\times\boxed{\ 7\ }-k)$는 서로 같다.

즉, $\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=18)$

$\quad\mathrm{P}(X=4)=\mathrm{P}(X=17)$

$\quad\mathrm{P}(X=5)=\mathrm{P}(X=16)$

$\quad\vdots$

$\quad\mathrm{P}(X=10)=\mathrm{P}(X=11)$

그러므로 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=3}^{18}\{k\times \mathrm{P}(X=k)\}$

$=3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)+5\times\mathrm{P}(X=5)$
$+\cdots+17\times\mathrm{P}(X=17)+18\times\mathrm{P}(X=18)$

$=(3+18)\times\mathrm{P}(X=3)+(4+17)\times\mathrm{P}(X=4)$
$+\cdots+(10+11)\times\mathrm{P}(X=10)$

$=\boxed{21}\times\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)$

$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\sum_{k=11}^{18}\mathrm{P}(X=k)$ 이고

확률질량함수의 성질에 의하여

$\sum_{k=3}^{18}\mathrm{P}(X=k)=1$ 이므로

$\sum_{k=3}^{10}\mathrm{P}(X=k)=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ 이다.

$\mathrm{E}(X)=\boxed{21}\times\boxed{\dfrac{1}{2}}$

$p=7,\ q=21,\ r=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{p+q}{r}=2\times(7+21)=56$

17. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

등차중항의 성질에 의하여 $a_6+a_8=2a_7$

조건(가)에 의하여 $a_7=2a_7,\ a_7=0$

(ⅰ) $d>0$인 경우

$n\ge 7$인 자연수 n에 대하여

$S_n+T_n<S_{n+1}+T_{n+1}$이 되어 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $d=0$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=0$이므로

$S_n+T_n=0$이 되어 조건(나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $d<0$이고,

$a_7=a+6d=0,\ a=-6d>0$이므로

7 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n\ge 0,\ S_7=T_7$

조건(나)에 의하여 $S_7=T_7=42$

$S_7=\dfrac{7(2a+6d)}{2}=-21d=42$

$a=12,\ d=-2$

$S_{15}=\dfrac{15\times(24-28)}{2}=-30$

$S_{15}+T_{15}=84$

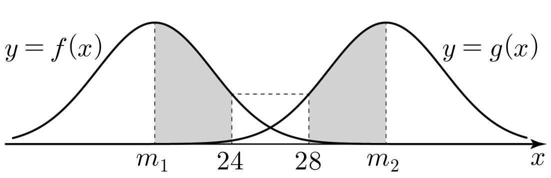
따라서 $T_{15}=84-(-30)=114$

18. [출제의도] 정규분포를 활용하여 추론하기

표준편차가 같은 정규분포곡선의 모양은 항상 일정하다. 확률변수 X, Y는 표준편차가 같은 정규분포를 따르고,

조건(가)에 의하여 $m_1<24<28<m_2$,

$f(24)=g(28)$인 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$라 하자.

$\mathrm{P}(m_1\le X\le 24)=\mathrm{P}(28\le Y\le m_2)=0.4772$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{24-m_1}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(\dfrac{28-m_2}{\sigma}\le Z\le 0\right)$
$=0.4772$

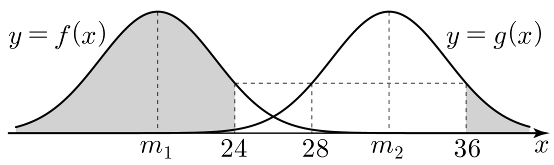
$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)=0.4772$

이므로 $\dfrac{24-m_1}{\sigma}=2,\quad \dfrac{28-m_2}{\sigma}=-2$

$24-m_1=2\sigma,\ m_2-28=2\sigma$ …… ㉠

조건(나)에 의하여

$\mathrm{P}(Y\ge 36)=1-\mathrm{P}(X\le 24)$
$=1-\mathrm{P}(Z\le 2)$
$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$



$\dfrac{36-m_2}{\sigma}=2,\ 36-m_2=2\sigma$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $m_2-28=36-m_2$

$m_2=32$이므로 $\sigma=2,\ m_1=20$

따라서 $\mathrm{P}(18\le X\le 21)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$
$=0.3413+0.1915$
$=0.5328$

19. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 하자.

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$이고

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$과 직선 $x=a_n$, 직선 $x=a_{n+1}$ 및 x축과 둘러싸인 도형의 넓이 S_n은

$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\times(a_{n+1}-a_n)\times(b_n+b_{n+1})$

$=b_n+b_{n+1}$

$a_1=1,\ a_6=11$이므로

$\int_1^{11}f(x)\,dx=\int_{a_1}^{a_6}f(x)\,dx$
$=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$
$=(b_1+b_2)+(b_2+b_3)+(b_3+b_4)$
$+(b_4+b_5)+(b_5+b_6)$

조건(다)에 의하여

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는

$\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{1}{2}a_{n+1},\ b_{n+1}=b_n+a_{n+1}$

$b_1=1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2=4$

$b_3=b_2+a_3=a_1+a_2+a_3=9$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2+a_3+a_4=16$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=25$

$b_6=b_5+a_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=36$

따라서 $\int_1^{11}f(x)\,dx=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$
$=(1+4)+(4+9)+(9+16)$
$+(16+25)+(25+36)$
$=145$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $f'(0)=g'(0)=0$

$x<0$에서 $f'(x)>0,\ g'(x)>0$

$0<x<4$에서 $f'(x)<0,\ g'(x)<0$

이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다. (참)

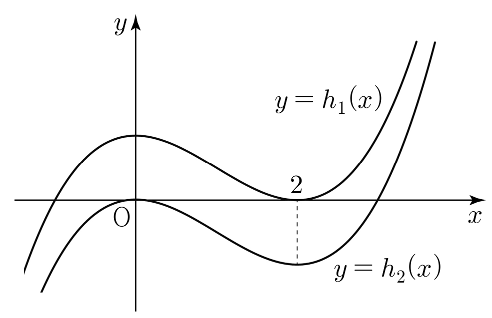
ㄴ. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+C_1,\ g(x)=-x^2+C_2$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x(x-2)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우는 삼차함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서만 만나는 경우이므로 삼차함수 $h(x)$의 그래프의 개형은 다음 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$의 두 가지이다.



$h(x)=h_1(x)$일 때, $h_1(2)=0$이므로

$h_1(0)\times h_1(2)=0$

$h(x)=h_2(x)$일 때, $h_2(0)=0$이므로

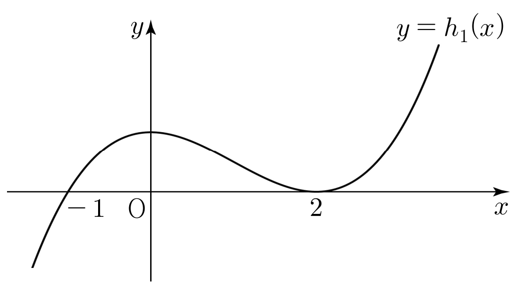
$h_2(0)\times h_2(2)=0$

$\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$ (참)

ㄷ. $\int_{-1}^{0}h_2(t)\,dt<0$이므로 함수 $h_2(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}\,dt\ge 0$을 만족시키는 함수 $h(x)$가 아니다.

$h_1(2)=-\dfrac{4}{3}+C_1-C_2=0,\ C_1-C_2=\dfrac{4}{3}$

$h_1(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$



$x<-1$일 때, $h_1(x)<0$이므로 $\int_{-1}^{x}h_1(t)\,dt>0$

$x\ge -1$일 때, $h_1(x)\ge 0$이므로 $\int_{-1}^{x}h_1(t)\,dt\ge 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}\,dt\ge 0$을 만족시키는

함수 $h(x)$는 함수 $h_1(x)$이다.

$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{1}{3}x^3-x^2+\dfrac{4}{3}\right)dx$
$=2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$a>0$, $d<-1$이므로
$n\le k$일 때 $a_n\ge 0$, $n\ge k+1$일 때 $a_n<0$인 자연수 k가 유일하게 존재한다.
$n\le k$일 때,

$a_n\ge 0$, $b_n=a_{n+1}-\dfrac{n}{2}$ 이므로

$b_1=a_2-\dfrac{1}{2}$, $b_2=a_3-1$, $\cdots$, $b_k=a_{k+1}-\dfrac{k}{2}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1$일 때,

$b_{n+1}-b_n=d-\dfrac{1}{2}$ 을 만족시킨다.

$n\ge k+1$일 때,

$a_n<0$, $b_n=a_n+\dfrac{n}{2}$ 이므로

$b_{k+1}=a_{k+1}+\dfrac{k+1}{2}$, $b_{k+2}=a_{k+2}+\dfrac{k+2}{2}$,

$b_{k+3}=a_{k+3}+\dfrac{k+3}{2}$, $\cdots$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots$

일 때, $b_{n+1}-b_n=d+\dfrac{1}{2}$ 을 만족시킨다.

즉, $n\le k-1$일 때, $d-\dfrac{1}{2}<0$이므로 $b_n>b_{n+1}$,

$n\ge k+1$일 때, $d+\dfrac{1}{2}<0$이므로 $b_n>b_{n+1}$,

$n=k$일 때,

$$b_{k+1}-b_k=\left(a_{k+1}+\frac{k+1}{2}\right)-\left(a_{k+1}-\frac{k}{2}\right)$$
$$=k+\frac{1}{2}>0 \text{ 이므로 } b_n<b_{n+1}$$

그러므로 $n=k$일 때만 $b_n<b_{n+1}$이다.
조건(가)에서 $b_5<b_6$이므로 $k=5$이다.

그러므로 $b_n=\begin{cases}a_{n+1}-\dfrac{n}{2} & (n\le 5)\\ a_n+\dfrac{n}{2} & (n\ge 6)\end{cases}$

조건(나)에 의하여

$$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$$
$$=\frac{5(b_1+b_5)}{2}=\frac{5}{2}\times\left\{\left(a_2-\frac{1}{2}\right)+\left(a_6-\frac{5}{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\times(2a+6d-3)=0$$

즉, $2a+6d-3=0$ …… ㉠

$$S_9-S_5=b_6+b_7+b_8+b_9$$
$$=\frac{4(b_6+b_9)}{2}=\frac{4}{2}\times\left\{(a_6+3)+\left(a_9+\frac{9}{2}\right)\right\}$$
$$=2\times\left(2a+13d+\frac{15}{2}\right)=0$$

즉, $2a+13d+\dfrac{15}{2}=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a=6$, $d=-\dfrac{3}{2}$ 이므로 $a_n=-\dfrac{3}{2}n+\dfrac{15}{2}$

$S_9=0$, $b_{10}=a_{10}+5=-\dfrac{15}{2}+5=-\dfrac{5}{2}$

$n\ge 6$일 때, 수열 $\{b_n\}$은

$b_{n+1}-b_n=d+\dfrac{1}{2}=-1$ 을 만족시키므로

$$S_n=S_9+(b_{10}+b_{11}+b_{12}+\ \cdots\ +b_n)$$
$$=0+\frac{(n-9)\{-5+(n-10)(-1)\}}{2}$$
$$=-\frac{(n-5)(n-9)}{2}\quad (n\ge 10)$$

$S_n\le -70$을 만족시키는 n의 값의 범위는
$n\ge 19$이므로 자연수 n의 최솟값은 19

[참고]

$$b_n=\begin{cases}6-2n & (n\le 5)\\ \dfrac{15}{2}-n & (n\ge 6)\end{cases}$$

$$S_n=\begin{cases}n(5-n) & (n\le 5)\\ -\dfrac{1}{2}(n-5)(n-9) & (n\ge 6)\end{cases}$$

이므로 $n\le 9$일 때, $S_n\ge 0$

22. [출제의도] 중복조합 계산하기

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

23. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f(x)=4x^3-5x+9$라 하면
$f'(x)=12x^2-5$, $f'(1)=7$

24. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_{27}a=\log_{3^3}a=\dfrac{1}{3}\log_3 a$,

$\log_3\sqrt{b}=\log_3 b^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_3 b$ 이므로

$\dfrac{1}{3}\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 b$

$\log_b a=\dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}=\dfrac{3}{2}$

따라서

$20\log_b\sqrt{a}=10\log_b a=15$

25. [출제의도] 도함수를 활용하여 속도, 가속도 문제 해결하기

점 P의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의
속도 v는 $v=6t^2-2kt$
가속도 a는 $a=12t-2k$
$t=1$일 때, $v=6-2k=0$이므로 $k=3$
따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는
$12\times 3-2\times 3=30$

26. [출제의도] 확률분포의 분산 이해하기

$a-b$의 값이 확률변수 X이므로
X가 가질 수 있는 값은
$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$
확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$\mathrm{E}(X)$

$$=(-3)\times\frac{1}{16}+(-2)\times\frac{2}{16}+(-1)\times\frac{3}{16}$$
$$+0\times\frac{4}{16}+1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{2}{16}+3\times\frac{1}{16}=0$$

$\mathrm{E}(X^2)$

$$=(-3)^2\times\frac{1}{16}+(-2)^2\times\frac{2}{16}+(-1)^2\times\frac{3}{16}$$
$$+0^2\times\frac{4}{16}+1^2\times\frac{3}{16}+2^2\times\frac{2}{16}+3^2\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{5}{2}$

따라서 $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X+1)=4\times\mathrm{V}(X)=10$

27. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$0\le x<2^{n+1}$일 때, $0\le\dfrac{\pi}{2^n}x<2\pi$이므로

부등식 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}x\right)\le -\dfrac{1}{2}$ 의 해는

$\dfrac{2}{3}\pi\le\dfrac{\pi}{2^n}x\le\dfrac{4}{3}\pi$, 즉 $\dfrac{2^{n+1}}{3}\le x\le\dfrac{2^{n+2}}{3}$

a_n은 $\dfrac{2^{n+1}}{3}\le x\le\dfrac{2^{n+2}}{3}$ 을 만족시키는

서로 다른 모든 자연수 x의 개수이고,

$\dfrac{2^{n+2}}{3}$ 은 자연수가 아니므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{7}a_n$ 은 $\dfrac{2^2}{3}\le x\le\dfrac{2^9}{3}$ 인 자연수의 개수와 같다.

$\dfrac{2^2}{3}=1.333\cdots$, $\dfrac{2^9}{3}=170.666\cdots$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7}a_n=170-1=169$

[참고]

(i) $n=1$일 때, $\dfrac{2^2}{3}\le x\le\dfrac{2^3}{3}$ 인 자연수 x는 2이므로 $a_1=1$

(ii) $n=2$일 때, $\dfrac{2^3}{3}\le x\le\dfrac{2^4}{3}$ 인 자연수 x는 $3,\ 4,\ 5$이므로 $a_2=3$

(iii) $n=3$일 때, $\dfrac{2^4}{3}\le x\le\dfrac{2^5}{3}$ 인 자연수 x는 $6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$이므로 $a_3=5$

(iv) $n=4$일 때, $\dfrac{2^5}{3}\le x\le\dfrac{2^6}{3}$ 인 자연수 x는 $11,\ 12,\ 13,\ \cdots,\ 21$이므로 $a_4=11$

(v) $n=5$일 때, $\dfrac{2^6}{3}\le x\le\dfrac{2^7}{3}$ 인 자연수 x는 $22,\ 23,\ 24,\ \cdots,\ 42$이므로 $a_5=21$

(vi) $n=6$일 때, $\dfrac{2^7}{3}\le x\le\dfrac{2^8}{3}$ 인 자연수 x는 $43,\ 44,\ 45,\ \cdots,\ 85$이므로 $a_6=43$

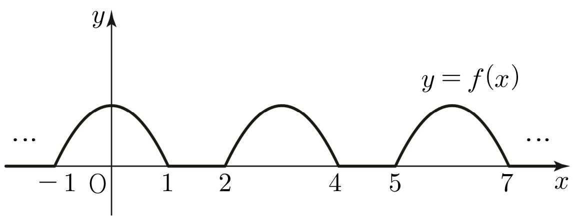
(vii) $n=7$일 때, $\dfrac{2^8}{3}\le x\le\dfrac{2^9}{3}$ 인 자연수 x는 $86,\ 87,\ 88,\ \cdots,\ 170$이므로 $a_7=85$

28. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)+x^2-1\}^2\ge 0$, $f(x)\ge 0$이므로

정적분 $\displaystyle\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$ 의 값이 최소가

되기 위해서는
(i) $-1\le x\le 1$에서
 $x^2-1\le 0$이므로 $f(x)=-(x^2-1)=-x^2+1$
(ii) $1<x\le 2$에서
 $x^2-1>0$이므로 $f(x)=0$
$f(x+3)=f(x)$이고, (i), (ii)에 의하여
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{2}^{5} f(x)\,dx = \int_{5}^{8} f(x)\,dx$$

$$= \cdots = \int_{23}^{26} f(x)\,dx$$

따라서 $\int_{-1}^{26} f(x)\,dx = 9\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

$$= 9\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx = 12$$

29. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제 해결하기

3명의 학생을 A, B, C라 하자.

(i) 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받는 경우
흰 공 2개를 모두 받는 1명의 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$
흰 공 2개를 모두 받은 학생이 A일 때, 학생 A는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다. 학생 A에게 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_2 \times {}_3H_2 = 36$
학생 B가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수이므로 ${}_2H_2 \times {}_2H_2 = 9$
같은 방법으로 학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수도 ${}_2H_2 \times {}_2H_2 = 9$
학생 B와 C가 모두 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 ${}_1H_2 \times {}_1H_2 = 1$
그러므로 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받도록 나누어 주는 경우의 수는
$3 \times (36 - 2 \times 9 + 1) = 57$

(ii) 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받는 경우
흰 공을 1개씩 받는 2명의 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$
흰 공을 1개씩 받은 학생이 A, B일 때, 학생 A, B는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다. 학생 A, B에게 각각 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_1 \times {}_3H_1 = 9$
학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 ${}_2H_1 \times {}_2H_1 = 4$
그러므로 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3 \times (9-4) = 15$

(i), (ii)에 의하여
구하는 경우의 수는 $57 + 15 = 72$

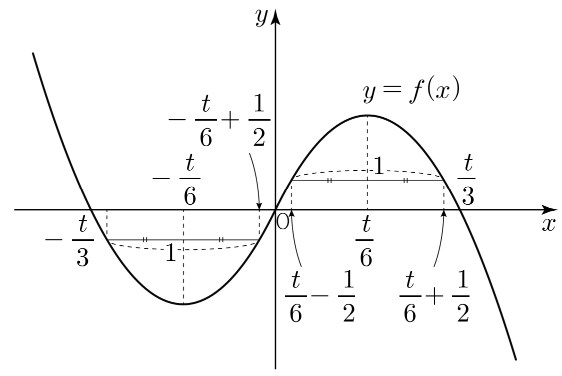
30. [출제의도] 함수의 극대, 극소와 정적분을 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, $x<0$일 때, $f'(x) = 6x + t$, $x>0$일 때, $f'(x) = -6x + t$이므로 함수 $f(x)$는 $x = -\frac{t}{6}$에서 극소, $x = \frac{t}{6}$에서 극대이다.

$f(x) = 0$을 만족시키는 x의 값은
$x = -\frac{t}{3}$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = \frac{t}{3}$

$f_1(x) = 3x^2 + tx$, $f_2(x) = -3x^2 + tx$라 하자.

(i) $\frac{t}{3} \ge 1$인 경우 (즉, $t \ge 3$)



조건(가)에서 닫힌구간 $[k-1, k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.

함수 $f_1(x)$의 그래프는 직선 $x = -\frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_1(k-1) = f_1(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k = -\frac{t}{6} + \frac{1}{2}$

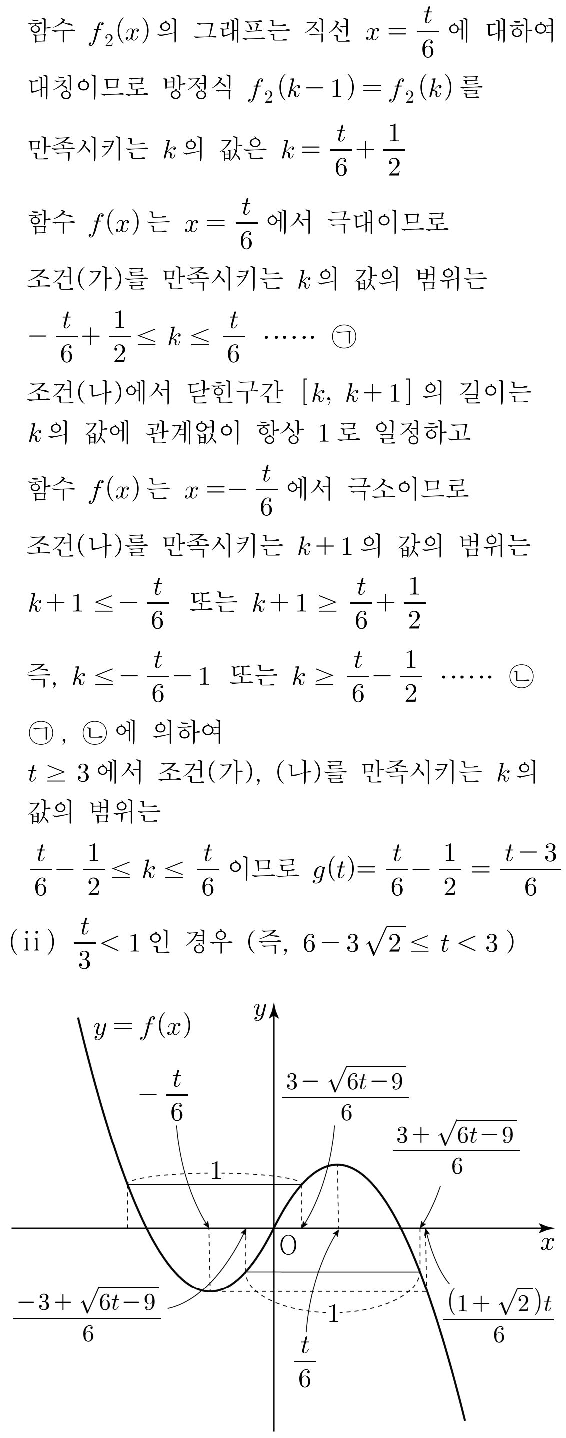
함수 $f_2(x)$의 그래프는 직선 $x = \frac{t}{6}$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f_2(k-1) = f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 $k = \frac{t}{6} + \frac{1}{2}$

함수 $f(x)$는 $x = \frac{t}{6}$에서 극대이므로
조건(가)를 만족시키는 k의 값의 범위는
$-\frac{t}{6} + \frac{1}{2} \le k \le \frac{t}{6}$ …… ㉠

조건(나)에서 닫힌구간 $[k, k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고
함수 $f(x)$는 $x = -\frac{t}{6}$에서 극소이므로
조건(나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는
$k+1 \le -\frac{t}{6}$ 또는 $k+1 \ge \frac{t}{6} + \frac{1}{2}$
즉, $k \le -\frac{t}{6} - 1$ 또는 $k \ge \frac{t}{6} - \frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여
$t \ge 3$에서 조건(가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는
$\frac{t}{6} - \frac{1}{2} \le k \le \frac{t}{6}$이므로 $g(t) = \frac{t}{6} - \frac{1}{2} = \frac{t-3}{6}$

(ii) $\frac{t}{3} < 1$인 경우 (즉, $6 - 3\sqrt{2} \le t < 3$)



$f_1\left(-\frac{t}{6}\right) = 3 \times \left(-\frac{t}{6}\right)^2 + t\left(-\frac{t}{6}\right) = -\frac{t^2}{12}$이므로

$f_2(x) = -\frac{t^2}{12}$을 만족시키는 양수 x의 값은
x에 대한 방정식 $-3x^2 + tx = -\frac{t^2}{12}$의
양의 실근인 $x = \frac{(1+\sqrt{2})t}{6}$

$t \ge 6 - 3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{(1+\sqrt{2})t}{6} - \left(-\frac{t}{6}\right)$$

$$= \frac{(2+\sqrt{2})t}{6} \ge \frac{(2+\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}{6} = 1$$

조건(가)에서 닫힌구간 $[k-1, k]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하다.
$6 - 3\sqrt{2} \le t < 3$에서
방정식 $f_1(k-1) = f_2(k)$를 만족시키는 k의 값은 k에 대한 방정식
$3(k-1)^2 + t(k-1) = -3k^2 + tk$의 실근인
$k = \frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$ 또는 $k = \frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$

함수 $f(x)$는 $x = \frac{t}{6}$에서 극대이므로
조건(가)를 만족시키는 k의 값의 범위는
$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} \le k \le \frac{t}{6}$ …… ㉢

조건(나)에서 닫힌구간 $[k, k+1]$의 길이는 k의 값에 관계없이 항상 1로 일정하고
함수 $f(x)$는 $x = -\frac{t}{6}$에서 극소이므로
조건(나)를 만족시키는 $k+1$의 값의 범위는
$k+1 \le -\frac{t}{6}$ 또는 $k+1 \ge \frac{3+\sqrt{6t-9}}{6}$
즉, $k \le -\frac{t}{6} - 1$ 또는 $k \ge \frac{-3+\sqrt{6t-9}}{6}$ … ㉣

㉢, ㉣에 의하여
$6 - 3\sqrt{2} \le t < 3$에서 조건(가), (나)를 만족시키는 k의 값의 범위는
$\frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} \le k \le \frac{t}{6}$이므로
$g(t) = \frac{3-\sqrt{6t-9}}{6}$

(i), (ii)에 의하여

$$g(t) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} & (6-3\sqrt{2} \le t < 3) \\ \frac{t-3}{6} & (t \ge 3) \end{cases}$$

따라서

$$3\int_2^4 \{6g(t) - 3\}^2\,dt$$

$$= 3\int_2^3 \left(6 \times \frac{3-\sqrt{6t-9}}{6} - 3\right)^2 dt + 3\int_3^4 \left\{6 \times \left(\frac{t-3}{6}\right) - 3\right\}^2 dt$$

$$= 3\int_2^3 (6t-9)\,dt + 3\int_3^4 (t-6)^2\,dt$$

$= 18 + 19$
$= 37$