정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	②	3	⑤	4	②	5	⑤
6	①	7	①	8	①	9	④	10	③
11	⑤	12	④	13	①	14	③	15	④
16	③	17	②	18	②	19	④	20	③
21	①	22	25	23	5	24	45	25	3
26	11	27	20	28	15	29	13	30	686

해 설

1. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3^3}=3$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2\sqrt{2}+\log_2 2\sqrt{2}$
$=\log_2(\sqrt{2}\times 2\sqrt{2})=\log_2 4=2$

3. [출제의도] 부채꼴의 중심각의 크기 계산하기

부채꼴의 넓이를 S, 중심각의 크기를 θ, 반지름의 길이를 r라 하면 $S=\frac{1}{2}r^2\theta$이므로 $15\pi=\frac{1}{2}\times 6^2\times\theta$이다. 따라서 $\theta=\frac{5}{6}\pi$

4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 계산하기

$x=\pi-\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\cos x=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{2}$이므로

$\cos\theta=\frac{1}{2}$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

따라서 $x=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

5. [출제의도] 상용로그표 이해하기

수	$\cdots$	4	5	6	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
3.1	$\cdots$	.4969	.4983	.4997	$\cdots$
3.2	$\cdots$	.5105	.5119	.5132	$\cdots$
3.3	$\cdots$	.5237	.5250	.5263	$\cdots$

$\log(3.14\times10^{-2})=\log 3.14+\log 10^{-2}$
$=\log 3.14-2$

이고 상용로그표에서 $\log 3.14=0.4969$이다.
따라서 $\log(3.14\times10^{-2})=0.4969-2=-1.5031$

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\cos\theta=-\frac{2}{3}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$이다.

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

7. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$(\sqrt{2})^{1+\log_2 3}=(\sqrt{2})^{\log_2 6}=2^{\frac{1}{2}\log_2 6}=2^{\log_2\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

8. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=a\times2^{2-x}+b=4a\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+b$는
$a>0$이고 밑이 1보다 작으므로, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 5를 갖고, $x=2$일 때 최솟값 -2를 갖는다.
$f(-1)=a\times2^3+b=8a+b=5$
$f(2)=a\times2^0+b=a+b=-2$이므로
$a=1$, $b=-3$이다.
따라서 $f(0)=4a+b=4-3=1$

9. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_2(x-a)+1$의 그래프가 점 $(7,b)$를 지나므로 $b=\log_2(7-a)+1$이다.
함수 $y=\log_2(x-a)+1$의 그래프의 점근선이 직선 $x=3$이므로 $a=3$이고,
$b=\log_2(7-3)+1=3$이다. 따라서 $a+b=6$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=a\tan bx+c$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{\pi}{b}=2\pi$에서 $b=\frac{1}{2}$이다.

함수 $y=a\tan\frac{x}{2}+c$의 그래프가 점 $(0,2)$를 지나므로 $2=a\tan0+c$에서 $c=2$이다.

함수 $y=a\tan\frac{x}{2}+2$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2},5\right)$를 지나므로 $5=a\tan\frac{\pi}{4}+2$에서 $a=3$이다.

따라서 $a\times b\times c=3$

11. [출제의도] 지수함수가 포함된 방정식 이해하기

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}=2^{-2x^2}$이므로 $2^{x-6}=2^{-2x^2}$에서
$x-6=-2x^2$이다.
$2x^2+x-6=0$, $(x+2)(2x-3)=0$에서

$x=-2$ 또는 $\frac{3}{2}$이므로 모든 해의 합은 $-\frac{1}{2}$

12. [출제의도] 로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$C=75$, $W=15$, $S=186$, $N=a$이므로

$75=15\times\log_2\left(1+\frac{186}{a}\right)$이다.

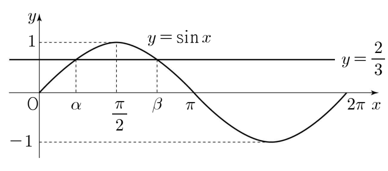
$\log_2\left(1+\frac{186}{a}\right)=5$에서 $1+\frac{186}{a}=2^5=32$이다.

따라서 $a=6$

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$3\sin x-2>0$에서 $\sin x>\frac{2}{3}$이다.

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$는 그림과 같다.



$0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $3\sin x-2>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프와

직선 $y=\frac{2}{3}$가 만나는 두 점의 x좌표는 각각 α, $\beta\ (0<\alpha<\beta<\pi)$이다.

$\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta-\frac{\pi}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\pi$이다.

따라서 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\pi=-1$

14. [출제의도] 로그함수 이해하기

(ⅰ) $0<t<1$일 때, $\frac{1}{t}>1$이므로

$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=0+\log_3\frac{1}{t}=2$에서 $t=\frac{1}{9}$이다.

(ⅱ) $t=1$일 때, $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=0\neq2$

(ⅲ) $t>1$일 때, $0<\frac{1}{t}<1$이므로

$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=\log_3 t+0=2$에서 $t=9$이다.

따라서 $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=2$를 만족시키는 모든 양수 t의 값의 합은 $\frac{1}{9}+9=\frac{82}{9}$

15. [출제의도] 삼각함수의 활용 문제 해결하기

선분 AP가 $\angle$BAC의 이등분선이고
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:1$이므로 $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PC}}=3:1$이다.
$\overline{\mathrm{PC}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=3k$이다.
삼각형 BAC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3^2+1^2-(4k)^2}{2\times3\times1}$에서 $k>0$이므로

$k=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R$이므로 $R=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는 $\frac{7}{16}\pi$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 E라 하면 삼각형 ACB와 삼각형 BCD의 넓이의 비가 $3:2$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{AB}}:\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CB}}\times\overline{\mathrm{BE}}=3:2$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=3:2$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\frac{2}{5}\overline{\mathrm{AE}}$이다.

$\overline{\mathrm{BE}}=\log_a k$, $\overline{\mathrm{AE}}=\log_2 k$이므로

$\log_a k=\frac{2}{5}\log_2 k$에서 $a=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$

17. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이 추론하기

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{DAB}=2\theta$이므로
$\angle\mathrm{BDA}=\pi-3\theta$이다.
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$

이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{3\sin\theta}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$이다.

또한 $\angle\mathrm{EAD}=\theta$이고 $\angle\mathrm{ADE}=2\theta$이므로
$\angle\mathrm{DEA}=\pi-3\theta$이다.
삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\pi-3\theta)}$이므로

$\overline{\mathrm{DE}}=\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\times\overline{\mathrm{AD}}=\boxed{\frac{1}{3}}\times\overline{\mathrm{AD}}^2$

이다. 따라서 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\sin(\angle\mathrm{ADE})$

$=\frac{1}{6}\times\left\{\frac{3\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\right\}^3\times\sin2\theta$

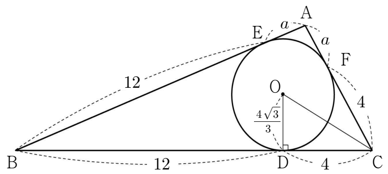
$=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)^3\times\boxed{\sin2\theta}$

이다.

$f(\theta)=\sin(\pi-3\theta)$, $g(\theta)=\sin2\theta$, $p=\frac{1}{3}$이므로

$p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}\times\sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{6}$

18. [출제의도] 삼각함수의 정의를 이용하여 삼각함수 문제 해결하기



그림과 같이 원의 중심을 O라 하고, 원과 두 선분 AB, AC가 만나는 점을 각각 E, F라 하자.

$\tan(\angle\text{OCD})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\angle\text{OCD}=\dfrac{\pi}{6}$,

$\angle\text{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$ 이다. $\overline{\text{AE}}=a$ 라 하면 $\overline{\text{AF}}=a$ 이고

(삼각형 ABC의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times16\times(a+4)\times\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}(a+4)$

(삼각형 OAB의 넓이)+(삼각형 OBC의 넓이)

+(삼각형 OCA의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\{(a+12)+16+(a+4)\}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(a+16)$ 이다.

그러므로 $4\sqrt{3}(a+4)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(a+16)$ 에서

$a=2$ 이다. 따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$2\times(12+4+2)=36$

[다른 풀이]

삼각형 BCA에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{16^2+(a+4)^2-(a+12)^2}{2\times16\times(a+4)}$ 이므로 $a=2$ 이다.

19. [출제의도] 지수함수가 포함된 부등식 문제 해결하기

$p=\sqrt{2}-1$ 이라 하면 $p^2=3-2\sqrt{2}$ 이고

$(p^2)^{5-n}=p^{10-2n}$ 이므로 $p^m\ge p^{10-2n}$ 이다.

$0<p<1$ 이므로 $m\le10-2n$ 이다.

(i) $n=1$ 일 때, $1\le m\le8$

(ii) $n=2$ 일 때, $1\le m\le6$

(iii) $n=3$ 일 때, $1\le m\le4$

(iv) $n=4$ 일 때, $1\le m\le2$

(v) $n\ge5$ 일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 m 은 존재하지 않는다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 $8+6+4+2=20$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 명제 추론하기

ㄱ. $n=2$ 일 때, $\text{A}(1, 1)$, $\text{B}(3, 1)$ 이므로 $f(2)=2$ (참)

ㄴ. 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{6}{1+\log_2 n}, 1\right)$ 이므로

$f(n)\ge1$ 을 만족시키는 $f(n)$ 은

$f(n)=\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1$ 이다.

$\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\ge1$ 에서 $1+\log_2 n\le3$ 이므로

$1\le n\le4$ 이다.

따라서 $f(n)\ge1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는 4 (참)

ㄷ. $|f(n)-1|\ge\dfrac{2}{3}$ 에서 $f(n)\ge\dfrac{5}{3}$ 또는

$0\le f(n)\le\dfrac{1}{3}$ 이다.

(i) $f(n)\ge\dfrac{5}{3}$ 를 만족시키는 $f(n)$ 은

$f(n)=\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1$ 이다. $\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\ge\dfrac{5}{3}$ 에서

$\dfrac{6}{1+\log_2 n}\ge\dfrac{8}{3}$ 이므로 $\log_2 n\le\dfrac{5}{4}$ 이다. 따라서

$1\le n\le2^{\frac{5}{4}}$ 이고 $2<2^{\frac{5}{4}}<3$ 이므로 자연수 n 은 1, 2이다.

(ii) $0\le f(n)\le\dfrac{1}{3}$ 을 만족시키는 $f(n)$ 은

$f(n)=\left|\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\right|$ 이다.

$0\le\left|\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\right|\le\dfrac{1}{3}$ 에서

$\dfrac{2}{3}\le\dfrac{6}{1+\log_2 n}\le\dfrac{4}{3}$ 이므로 $\dfrac{7}{2}\le\log_2 n\le8$ 이다.

따라서 $2^{\frac{7}{2}}\le n\le2^8$ 이고 $11<2^{\frac{7}{2}}<12$ 이므로

자연수 n 은 12, 13, 14, $\cdots$, 256이다.

(i), (ii)에서 $n=1$, 2, 12, 13, 14, $\cdots$, 256

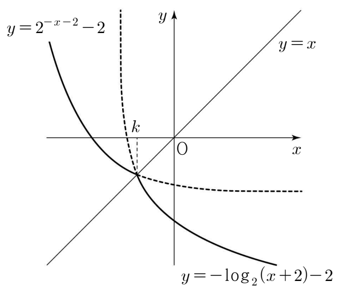
이므로 $|f(n)-1|\ge\dfrac{2}{3}$ 를 만족시키는 자연수 n 의

개수는 247 (거짓)

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 부등식의 해 추론하기

두 곡선 $y=-\log_2(x+2)-2$ 와 $y=2^{-x-2}-2$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

정의역과 공역이 각각 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이므로 상수 k 의 값은 두 곡선의 교점의 x 좌표이다.



곡선 $y=-\log_2(x+2)-2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표가

$-\dfrac{7}{4}$ 이므로 $k>-\dfrac{7}{4}$ 이다.

$k\ge-1$ 이라 가정하면

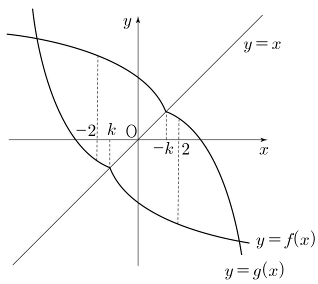
$k=-\log_2(k+2)-2$ 이므로

$k=-\log_2(k+2)-2\le-\log_2\{(-1)+2\}-2=-2$

가 되어 모순이므로 $k<-1$ 이다.

따라서 k 의 값의 범위는 $-\dfrac{7}{4}<k<-1$ 이다.

두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $-2\le x<k$ 일 때, $f(x)=2^{-x-2}-2$,

$g(x)=\log_2(2-x)+2$ 이고

$f(-2)=-1$, $g(-2)=4$ 이므로

$(-2, -1)$, $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$,

$(-2, 3)$, $(-2, 4)$: 6개

(ii) $k\le x<-k$ 일 때, $f(x)=-\log_2(x+2)-2$,

$g(x)=\log_2(2-x)+2$ 이고

① $f(-1)=-2$, $3<g(-1)<4$ 이므로

$(-1, -2)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$, $(-1, 1)$,

$(-1, 2)$, $(-1, 3)$: 6개

② $f(0)=-3$, $g(0)=3$ 이므로

$(0, -3)$, $(0, -2)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$,

$(0, 2)$, $(0, 3)$: 7개

③ $-4<f(1)<-3$, $g(1)=2$ 이므로

$(1, -3)$, $(1, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$,

$(1, 2)$: 6개

(iii) $-k\le x\le2$ 일 때, $f(x)=-\log_2(x+2)-2$,

$g(x)=-2^{x-2}+2$ 이고

$f(2)=-4$, $g(2)=1$ 이므로

$(2, -4)$, $(2, -3)$, $(2, -2)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$,

$(2, 1)$: 6개

(i), (ii), (iii)에서 $6+6+7+6+6=31$

따라서 $f(a)\le b\le g(a)$ 를 만족시키는 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 31

22. [출제의도] 지수 계산하기

$5^{\frac{7}{3}}\div5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}=5^2=25$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식 계산하기

$\log_3(x-2)=1$ 에서 $x-2=3$ 이다.

따라서 $x=5$

24. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}$ 이다.

$\sin\theta=\dfrac{\cos\theta}{3}$ 이고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$\cos^2\theta=\dfrac{9}{10}$ 이다.

따라서 $50\cos^2\theta=45$

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+k$ 의 그래프가

점 $\left(\dfrac{\pi}{6}, 2\right)$ 를 지나므로 $2=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)+k$ 이다.

따라서 $2=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+k$ 에서 $k=3$

26. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계 이해하기

함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프는 $y=\log_2(x-m)$ 이고

이 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는 $y=2^x+m$ 이다.

$f(x)=2^x+m$ 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 $5=2+m$ 에서 $m=3$ 이다.

따라서 $f(3)=2^3+3=11$

27. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_a b=k$, $\log_b c=2k$, $\log_c a=3k$ 이므로

$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1=6k^3$ 이다.

따라서 $k^3=\dfrac{1}{6}$ 이므로 $120k^3=20$

[다른 풀이]

$b=a^k$, $c=b^{2k}$, $a=c^{3k}$ 이므로

$c=b^{2k}=\left(a^k\right)^{2k}=a^{2k^2}$

$a=c^{3k}=\left(a^{2k^2}\right)^{3k}=a^{6k^3}$ 이다.

$a>1$ 이므로 $k^3=\dfrac{1}{6}$ 이다.

정답 및 해설

28. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식과 부등식 문제 해결하기

선분 AB 를 $2:1$ 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2-a}{2-1},\ \dfrac{2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b}{2-1}\right)$ 이고

$2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b=\log_8\sqrt{27}-\log_4 b$

$=\log_4 3-\log_4 b=\log_4\dfrac{3}{b}$

이므로

$\left(\dfrac{2-a}{2-1},\ \dfrac{2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b}{2-1}\right)=\left(2-a,\ \log_4\dfrac{3}{b}\right)$ 이다.

이 점이 곡선 $y=-\log_4(3-x)$ 위에 있으므로

$\log_4\dfrac{3}{b}=-\log_4(a+1)=\log_4\dfrac{1}{a+1}$ 이므로

$b=3(a+1)$ 이다.

집합 $\{n\mid b<2^n\times a\le 32b,\ n\text{은 정수}\}$ 에서

$\dfrac{b}{a}<2^n\le\dfrac{32b}{a}$ 이므로

$\log_2\dfrac{b}{a}<n\le 5+\log_2\dfrac{b}{a}$ 이다.

그러므로 집합 $\{n\mid b<2^n\times a\le 32b,\ n\text{은 정수}\}$ 의 원소의 개수는 5 이다.

$\{n\mid b<2^n\times a\le 32b,\ n\text{은 정수}\}$

$=\{m,\ m+1,\ m+2,\ m+3,\ m+4\}$ (m 은 정수)

라 하면

$m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+(m+4)=25$

이므로 $m=3$ 이다. 그러므로 $2\le\log_2\dfrac{b}{a}<3$ 이다.

$4\le\dfrac{b}{a}<8$ 이고 $b=3(a+1)$ 이므로 $\dfrac{3}{5}<a\le 3$ 이다.

그러므로 $a=1,\ b=6$ 또는 $a=2,\ b=9$ 또는 $a=3,\ b=12$ 이다. 따라서 $a+b$ 의 최댓값은 15

29. [출제의도] 삼각함수의 활용 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AB}}=a$ 라 하면 $\overline{\mathrm{DA}}=2a$ 이다.

삼각형 DAB 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2=a^2+(2a)^2-2\times a\times 2a\times\cos\dfrac{2}{3}\pi=7a^2$

이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{7}a$ 이다.

$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{ED}}=3:4$ 이므로

(삼각형 ABC 의 넓이):(삼각형 ADC 의 넓이) $=3:4$ 이다.

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ 라 할 때,

(삼각형 ABC 의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BA}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\theta$

(삼각형 ADC 의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DA}}\times\overline{\mathrm{DC}}\times\sin(\pi-\theta)$ 이고

(삼각형 ABC 의 넓이):(삼각형 ADC 의 넓이)

$=\overline{\mathrm{BA}}\times\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{DA}}\times\overline{\mathrm{DC}}=3:4$ 이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{3}{2}\overline{\mathrm{DC}}$ 이다. $\overline{\mathrm{DC}}=k$ 라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{3k}{2}$ 이고 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{7}a,\ \angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

삼각형 BCD 에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\left(\dfrac{3k}{2}\right)^2+k^2-(\sqrt{7}a)^2}{2\times\dfrac{3k}{2}\times k}$ 이므로

$k=2a$ 이고 $\overline{\mathrm{BC}}=3a,\ \overline{\mathrm{DC}}=2a$ 이다.

삼각형 DAB 의 외접원의 반지름의 길이가 1 이고 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\sqrt{7}a}{\sin\dfrac{2}{3}\pi}=2$ 이므로 $a=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$ 이다.

(삼각형 ABD 의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

(삼각형 BCD 의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{21}}{7}\times\dfrac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{14}$

이므로 사각형 ABCD 의 넓이는

$\dfrac{3\sqrt{3}}{14}+\dfrac{9\sqrt{3}}{14}=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$ 이다.

따라서 $p+q=13$

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식의 해 추론하기

$(f\circ h)(x)=\cos(a\pi x+b\pi)$

$=\begin{cases}\cos a\pi x & (b\text{는 짝수})\\ -\cos a\pi x & (b\text{는 홀수})\end{cases}$

이고 $(h\circ g)(x)=a\sin\pi x+b$ 이다.

두 자연수 $a,\ b$ 에 대하여

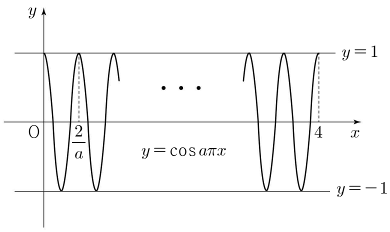
$(h\circ g)\left(\dfrac{3}{2}\right)=a\sin\dfrac{3}{2}\pi+b=-a+b$

는 정수이므로 조건 (가)의 방정식의 실근이 존재하기 위한 $-a+b$ 의 값은 -1 또는 0 또는 1 이다. 함수

$(f\circ h)(x)=\begin{cases}\cos a\pi x & (b\text{는 짝수})\\ -\cos a\pi x & (b\text{는 홀수})\end{cases}$

의 그래프는 주기가 $\dfrac{2}{a}$ 이므로

(i) b 가 짝수인 경우



① $-a+b=1$ 일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수는 $2a+1$

② $-a+b=0$ 일 때

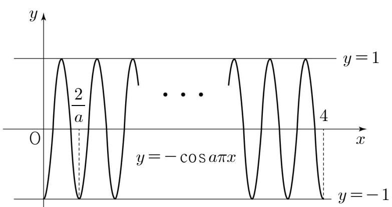
두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수는 $4a$

③ $-a+b=-1$ 일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수는 $2a$

따라서 두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수가 홀수이려면 $-a+b=1$ 이다. $b=a+1$ 이므로 a 는 홀수이다.

(ii) b 가 홀수인 경우



① $-a+b=1$ 일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=-\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수는 $2a$

② $-a+b=0$ 일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=-\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수는 $4a$

③ $-a+b=-1$ 일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=-\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수는 $2a+1$

따라서 두 함수 $y=(f\circ h)(x)=-\cos a\pi x$ 와 $y=-a+b$ 의 그래프의 교점의 개수가 홀수이려면 $-a+b=-1$ 이다. $b=a-1$ 이므로 a 는 짝수이다.

조건 (나)에서 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$ 의 해는

(i) a 가 홀수, b 가 짝수인 경우

$b=a+1$ 이므로 (나)의 방정식은

$\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a+1)$

$=a(\sin\pi t+1)+1$

이고 $a(\sin\pi t+1)+1\ge 1$ 이므로 $\cos a\pi x=1$ 이다.

$0\le x\le 4$ 일 때, 서로 다른 실근의 개수는 $2a+1$ 이고 함수 $y=\cos a\pi x$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\le x\le 4$ 일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $(2a+1)\times 2=4a+2=56$ 이 되어 자연수 a 는 존재하지 않는다.

(ii) a 가 짝수, b 가 홀수인 경우

$b=a-1$ 이므로 (나)의 방정식은

$-\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a-1)$

$=a(\sin\pi t+1)-1$

이고 $a(\sin\pi t+1)-1\ge -1$ 이므로 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

① $a\sin\pi t+(a-1)=-1$ 인 경우

$0\le x\le 4$ 일 때, $-\cos a\pi x=-1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $2a+1$ 이고 함수 $y=-\cos a\pi x$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\le x\le 4$ 일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $(2a+1)\times 2=4a+2=56$ 이 되어 자연수 a 는 존재하지 않는다.

② $-1<a\sin\pi t+(a-1)<1$ 인 경우

$0\le x\le 4$ 일 때, $-\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a-1)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $4a$ 이고 함수 $y=-\cos a\pi x$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\le x\le 4$ 일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $4a\times 2=8a=56$ 이 되어 짝수 a 는 존재하지 않는다.

③ $a\sin\pi t+(a-1)=1$ 인 경우

$0\le x\le 4$ 일 때, $-\cos a\pi x=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $2a$ 이고 함수 $y=-\cos a\pi x$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\le x\le 4$ 일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $2a\times 2=4a=56$ 이다. 그러므로 $a=14,\ b=13$ 이다.

$(h\circ g)(t)=a\sin\pi t+b=14\sin\pi t+13=1$ 에서

방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$ 의 서로 다른 모든 실근의 합이 56 이 되도록 하는 실수 t 는

$\sin\pi t=-\dfrac{6}{7}$ 을 만족시키므로 $\cos^2\pi t=\dfrac{13}{49}$ 이다.

따라서 $\dfrac{a\times b}{\cos^2\pi t}=\dfrac{14\times 13}{\dfrac{13}{49}}=686$