정답 및 해설

수학 영역

정답

1	⑤	2	④	3	②	4	③	5	③
6	④	7	④	8	②	9	③	10	⑤
11	④	12	①	13	①	14	⑤	15	②
16	5	17	17	18	13	19	24	20	27
21	117	22	64						

해설

1. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$4^{\frac{1}{2}}+\log_2 8=2+3=5$

2. [출제의도] 정적분 계산하기

$\int_0^1 (2x+3)dx=\left[x^2+3x\right]_0^1=1+3=4$

3. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=2x-a$
$f'(1)=2-a=0$
따라서 $a=2$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to-1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$
따라서 $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1$

5. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

양변의 밑을 5로 같게 하면
$5^{2x-7}\le5^{-x+2}$
$2x-7\le-x+2$에서 $x\le3$
주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는
1, 2, 3
따라서 자연수 x의 개수는 3

6. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$\cos(-\theta)+\sin(\pi+\theta)=\cos\theta-\sin\theta=\frac{3}{5}$
$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$
$=1-2\sin\theta\cos\theta$
$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$
따라서 $\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{25}$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1=10$이므로
$a_2=5-\frac{10}{10}=4$
$a_3=5-\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
$a_4=-2\times\frac{5}{2}+3=-2$
$a_5=5-\frac{10}{-2}=5+5=10$
$\vdots$
$a_9=a_5=a_1=10$, $a_{12}=a_8=a_4=-2$
따라서 $a_9+a_{12}=8$

8. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

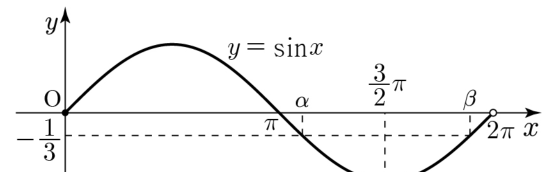
등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=ar^{n-1}$
$2a=S_2+S_3$이므로
$2a=(a+ar)+(a+ar+ar^2)$
$ar(2+r)=0$
$r^2=64a^2\ (a>0)$에 의하여
$r\ne0$이므로 $r=-2$, $a=\frac{1}{4}$
따라서 $a_5=\frac{1}{4}\times(-2)^4=4$

9. [출제의도] 거듭제곱근과 지수법칙 이해하기

$(\sqrt[n]{a})^3=a^{\frac{3}{n}}$
(ⅰ) $a=4$일 때 $4^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$
$n\ (n\ge2)$가 6의 양의 약수이어야 하므로
$n=2$, 3, 6
그러므로 $f(4)=6$
(ⅱ) $a=27$일 때 $27^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$
$n\ (n\ge2)$가 9의 양의 약수이어야 하므로
$n=3$, 9
그러므로 $f(27)=9$
따라서 $f(4)+f(27)=6+9=15$

10. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로
$3(1-\sin^2x)+5\sin x-1=0$
$3\sin^2x-5\sin x-2=0$
$(3\sin x+1)(\sin x-2)=0$
$-1\le\sin x\le1$이므로 $\sin x=-\frac{1}{3}$ … ㉠



㉠을 만족시키는 x의 값을 $x=\alpha$, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\alpha+\beta=3\pi$
따라서 모든 해의 합은 3π

11. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 활용하여 문제해결하기

직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점이 A이므로
$-2=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$에서 $x=2$
$\mathrm{A}(2,\ -2)$
$\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)$, $\mathrm{C}(10,\ -\log_a 8+1)$이고,
점 A와 직선 $x=10$ 사이의 거리는 8이므로
삼각형 ACB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times8\times\left\{\left(\frac{1}{2}\log_a 9-2\right)-(-\log_a 8+1)\right\}$
$=4\times(\log_a 24-3)=28$
$\log_a 24=10$
따라서 $a^{10}=24$

12. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 문제해결하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로
$f(x)=2x^2+ax+b$
함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.
$\lim_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$
$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서
(분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0
$\lim_{x\to3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$
$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$
$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$
$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$
$=\lim_{x\to3}(2x+a+6)=0$
이므로 $a=-12$, $b=18$
$f(x)=2x^2-12x+18$
따라서 $f(1)=8$

13. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기

주어진 식 (*)에 의하여
$nS_n=\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ \ (n\ge2)$ … ㉠
이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면
$(n+1)S_{n+1}-nS_n$
$=\log_2(n+2)-\log_2(n+1)$
$+\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ \ (n\ge2)$
이므로
$\boxed{(n+1)}\times a_{n+1}=\log_2\frac{n+2}{n+1}\ \ (n\ge2)$
이다.
$a_1=1=\log_2 2$이고,
$2S_2=\log_2 3+S_1=\log_2 3+a_1$이므로
$2a_2=\log_2\frac{3}{2}$
모든 자연수 n에 대하여
$na_n=\boxed{\log_2\frac{n+1}{n}}$
이다. 따라서
$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{k}$
$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n}$
$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$
$=\boxed{\log_2(n+1)}$
이다.
$f(n)=n+1$, $g(n)=\log_2\frac{n+1}{n}$,
$h(n)=\log_2(n+1)$
따라서
$f(8)-g(8)+h(8)=9-\log_2\frac{9}{8}+\log_2 9=12$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$
$t<2$일 때 $v(t)<0$
$t=2$일 때 $v(2)=0$
$t>2$일 때 $v(t)>0$
$t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^2=-4$

(참)

ㄷ. 시각 t 에서의 점 P 의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$a(t)=6t-6$

$6t-6=12$, $t=3$

$t=0$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리를 s 라 하면

$s=\int_0^3\left|3t^2-6t\right|dt$

$=-\int_0^2(3t^2-6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$

$=4+\left[t^3-3t^2\right]_2^3=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근

α , 0 , $\beta\,(\alpha<0<\beta)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\beta=-\alpha$

$f'(x)=4x(x-\alpha)(x+\alpha)$

$f(x)=x^4-2\alpha^2x^2+C$ (단, C는 적분상수이다.)

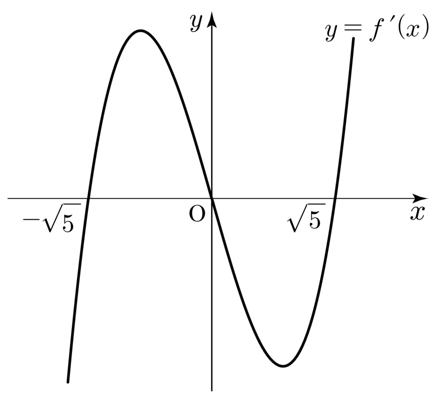
$f(-x)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에 의하여

$f(0)=9$, $C=9$

조건 (나)에 의하여 $f(\alpha)=\alpha^4-2\alpha^4+9=-16$

$\alpha=-\sqrt{5}$

함수 $f'(x)=4x(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

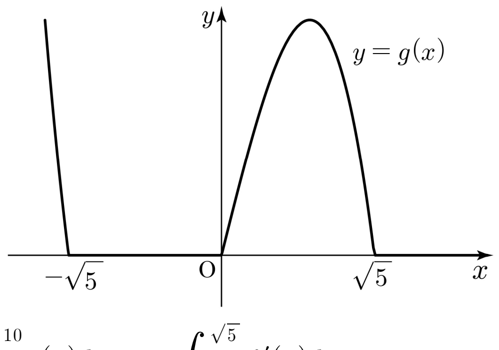


함수 $g(x)=\left|f'(x)\right|-f'(x)$ 이므로

함수

$$g(x)=\begin{cases}0 & (f'(x)\geq 0)\\ -2f'(x) & (f'(x)<0)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\int_0^{10}g(x)dx=-2\int_0^{\sqrt{5}}f'(x)dx$

$=-2\left[f(x)\right]_0^{\sqrt{5}}=-2\{f(\sqrt{5})-f(0)\}$

$=-2\times(-16-9)=50$

16. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+a}{x+1}=b$ 에서

(분모)$\to0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to-1}(x^2+4x+a)=0$ 이므로 $1-4+a=0$,

$a=3$

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x+3)=2=b$

따라서 $a+b=5$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\int(3x^2+6x-4)dx$

$=x^3+3x^2-4x+C$

(단, C는 적분상수이다.)

$f(1)=1+3-4+C=5$, $C=5$

$f(x)=x^3+3x^2-4x+5$

따라서 $f(2)=8+12-8+5=17$

18. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f'(x)=3x^2+a$

x 의 값이 1 에서 3 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율이 $f'(a)$ 의 값과 같으므로

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(a)$

$\frac{3^3+3a-(1^3+a)}{2}=3a^2+a$

따라서 $3a^2=13$

19. [출제의도] 곱의 미분법을 활용하여 문제해결하기

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=2$ 에서

(분모)$\to0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$ 이므로 $f(2)=4$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right\}$

$=\frac{1}{4}f'(2)=2$

$f'(2)=8$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=8$ 에서

(분모)$\to0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$

$\lim_{x\to2}\{g(x)+1\}=0$ 이므로 $g(2)=-1$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)=8$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

따라서 $h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=24$

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

선분 AB 는 삼각형 ABC 의 외접원의 지름이므로 삼각형 ABC 는 직각삼각형이다.

$\angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{CAB}=\alpha$ 라 하면

$\cos\alpha=\frac{1}{3}$ 이고, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$ 이므로

$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\alpha$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=18$ 이고, $\overline{\mathrm{AC}}=6$

점 D 는 선분 AB 를 $5:4$ 로 내분하는 점이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=10$

삼각형 CAD 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DC}}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\alpha=96$

$\overline{\mathrm{DC}}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면, 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{DC}}}{\sin\alpha}=2R$ 에서 $R=3\sqrt{3}$

삼각형 CAD 의 외접원의 넓이 $S=27\pi$

따라서 $\frac{S}{\pi}=27$

21. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 활용하여 문제해결하기

$a_1=a$ 라 하면

조건 (나)에 의하여

$\{a+(k-1)d\}^2=(a+d)\{a+(3k-2)d\}$

$d(k^2-5k+3)=a(k+1)$ $\cdots$ ㉠

모든 항이 자연수이므로

조건 (가)에서 $0<a\leq d$

$a(k+1)\leq d(k+1)$

$k^2-5k+3\leq k+1$

$k^2-6k+2\leq0$

$3-\sqrt{7}\leq k\leq3+\sqrt{7}$

$k\geq3$ 이므로 자연수 $k=3$, 4 , 5

㉠에서 $k^2-5k+3>0$ 이므로 $k=5$, $d=2a$

$90\leq a_{16}\leq100$, $a_{16}=a+15d=31a$

이므로 $a=3$, $d=6$

따라서 $a_{20}=a+19d=117$

22. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

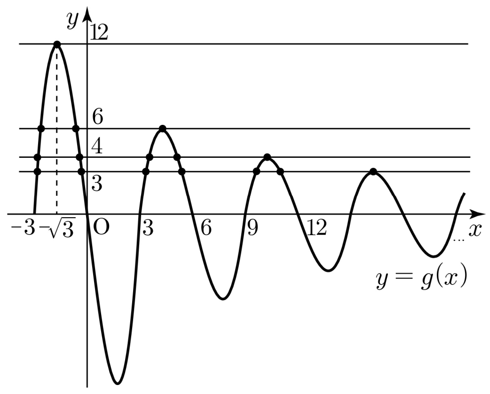
$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$

$f'(x)=2\sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	12 (극대)	↘	-12 (극소)	↗

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 k 에 대하여

$6k-3\leq x<6k+3$ 일 때

함수 $g(x)=\frac{1}{k+1}f(x-6k)$

$k+1$ 이 12 의 양의 약수가 될 때

함수 $g(x)$ 의 극댓값이 자연수이므로

$k=1$, 2 , 3 , 5 , 11 일 때

함수 $g(x)$ 의 극댓값은

각각 6 , 4 , 3 , 2 , 1 이다.

$a_1=2\times11+1=23$

$a_2=2\times5+1=11$

$a_3=2\times3+1=7$

$a_4=2\times2+1=5$

$a_5=2\times2=4$

$a_6=2\times1+1=3$

$7\leq n\leq11$ 일 때 $a_n=2\times1=2$

$a_{12}=1$

따라서

$\sum_{n=1}^{12}a_n=23+11+7+5+4+3+2\times5+1=64$

기하 정답

23	④	24	②	25	⑤	26	①	27	⑤
28	③	29	25	30	108				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 평행 계산하기

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면

$(2,\ 4) = t(-1,\ k)$를 만족시키는 실수 $t\ (t \neq 0)$가 존재한다.

그러므로 $2 = -t$, $4 = kt$

따라서 $k = -2$

24. [출제의도] 쌍곡선의 접선의 방정식 이해하기

쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax - by = 1$

기울기가 2이므로 $\dfrac{a}{b} = 2$, $a = 2b$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$4b^2 - b^2 = 1$

$3b^2 = 1$이고 b가 양수이므로 $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$a = 2b = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $ab = \dfrac{2}{3}$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\dfrac{a-5}{2} = b - 5$ ⋯ ㉠

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (a-2,\ b-6)$

직선 l의 방향벡터는 $\vec{u} = (2,\ 1)$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\vec{u}$는 서로 수직이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{u} = 0$

$2(a-2) + (b-6) = 0$

$b = -2a + 10$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a = 3$, $b = 4$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

26. [출제의도] 타원의 성질 이해하기

직선 $\mathrm{F'Q}$와 직선 FP가 만나는 점을 R라 하자.

직선 $\mathrm{F'Q}$가 선분 FP를 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{FR}} = \sqrt{3}$

삼각형 $\mathrm{FRF'}$에서

$\overline{\mathrm{FF'}} = 2\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{FR}} = \sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{F'R}} = 5$

장축의 길이가 8이므로

$\overline{\mathrm{F'Q}} + \overline{\mathrm{QF}} = \overline{\mathrm{F'R}} + \overline{\mathrm{RQ}} + \overline{\mathrm{QF}} = 8$

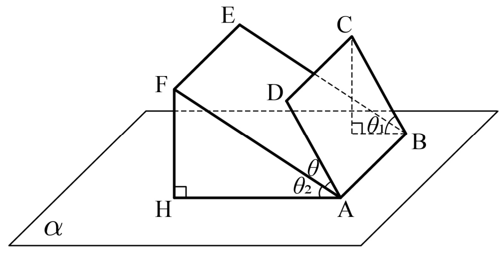
$\overline{\mathrm{FQ}} = a$라 하면 $\overline{\mathrm{RQ}} = 3 - a$

삼각형 FQR에서

$a^2 = (3-a)^2 + (\sqrt{3})^2$, $a = 2$

따라서 선분 FQ의 길이는 2

27. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기



정사각형 ABCD의 넓이는 36

정사각형 ABCD의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 18이므로 두 평면 ABCD와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 하면

$36 \times \cos\theta_1 = 18$이므로 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

점 F의 평면 α 위로의 정사영이 H이므로

두 평면 ABEF와 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하면

$\cos\theta_2 = \dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{AF}}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$

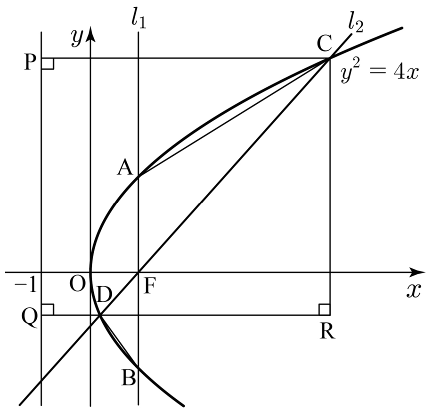
두 평면 ABCD와 ABEF가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\theta = \theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$

따라서 정사각형 ABCD의 평면 ABEF 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S' = 36 \times \cos\dfrac{\pi}{6} = 18\sqrt{3}$

28. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



$\angle \mathrm{AFC} = \angle \mathrm{DFB}$이고 $\overline{\mathrm{FA}} = \overline{\mathrm{FB}}$이다.

삼각형 FCA의 넓이가 삼각형 FDB의 넓이의 5배이므로

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{FA}} \times \overline{\mathrm{FC}} \times \sin(\angle \mathrm{AFC})$

$= 5 \times \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{FB}} \times \overline{\mathrm{FD}} \times \sin(\angle \mathrm{DFB})$

$\overline{\mathrm{FC}} = 5\overline{\mathrm{FD}}$

두 점 C, D에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고,

점 C를 지나고 x축에 수직인 직선과 직선 QD가 만나는 점을 R라 하자.

$\overline{\mathrm{FD}} = s$라 하면 $\overline{\mathrm{QD}} = \overline{\mathrm{FD}} = s$

$\overline{\mathrm{PC}} = \overline{\mathrm{FC}} = 5s$

$\overline{\mathrm{DR}} = \overline{\mathrm{QR}} - \overline{\mathrm{QD}} = 4s$, $\overline{\mathrm{CD}} = 6s$에서

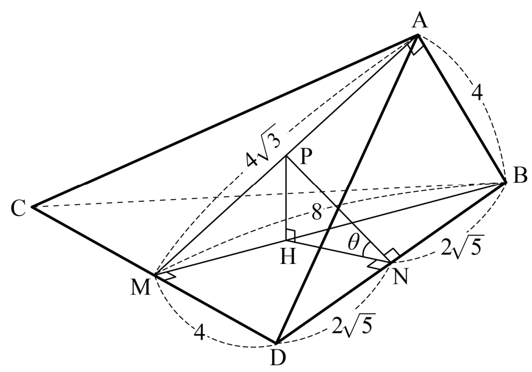
$\overline{\mathrm{CR}} = 2\sqrt{5}s$

따라서 $m = \dfrac{\overline{\mathrm{CR}}}{\overline{\mathrm{DR}}} = \dfrac{2\sqrt{5}s}{4s} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

29. [출제의도] 공간도형을 활용하여 문제해결하기

$\angle \mathrm{BMD} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BM}} = 8$

$\angle \mathrm{BAM} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AM}} = 4\sqrt{3}$



점 P에서 직선 BM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}} \perp \overline{\mathrm{BM}}$ ⋯ ㉠

직선 AB와 평면 ACD가 서로 수직이므로

$\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$

직선 CD는 두 직선 AB, BM과 서로 수직이므로

$\overline{\mathrm{CD}} \perp$ (평면 AMB)

직선 PH는 평면 AMB에 포함되므로

$\overline{\mathrm{PH}} \perp \overline{\mathrm{CD}}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\overline{\mathrm{PH}} \perp$ (평면 CDB)

$\overline{\mathrm{PH}} \perp$ (평면 CDB)이고 $\overline{\mathrm{PN}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{HN}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$

두 삼각형 DBM과 HBN은 서로 닮은 도형이므로 $\overline{\mathrm{BM}} : \overline{\mathrm{MD}} = \overline{\mathrm{BN}} : \overline{\mathrm{NH}}$에서

$\overline{\mathrm{NH}} = \dfrac{\overline{\mathrm{MD}} \times \overline{\mathrm{BN}}}{\overline{\mathrm{BM}}} = \sqrt{5}$

$\angle \mathrm{BNH} = \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{BH}}^2 = \overline{\mathrm{BN}}^2 + \overline{\mathrm{NH}}^2 = 25$

$\overline{\mathrm{BH}} = 5$, $\overline{\mathrm{MH}} = 3$

$\tan(\angle \mathrm{AMB}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PN}}^2 = \overline{\mathrm{PH}}^2 + \overline{\mathrm{HN}}^2 = 8$

$\overline{\mathrm{PN}} = 2\sqrt{2}$

두 평면 PDB, CDB의 교선은 직선 DB이고 평면 PDB 위의 점 P의 평면 CDB 위로의 정사영이 H이므로

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{HN}}}{\overline{\mathrm{PN}}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$

따라서 $40\cos^2\theta = 25$

30. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 활용하여 문제해결하기

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP})$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}$의 값은 일정하므로

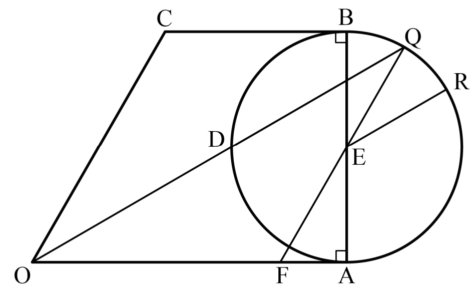
$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대일 때

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때의 점 P가 Q이다.



직선 QE가 선분 OA와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle \mathrm{EFA}=\frac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AE}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{FE}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{FA}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{FA}}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{FE}}+\overline{\mathrm{EQ}}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{FQ}}$이므로 $\angle \mathrm{OQF}=\frac{\pi}{6}$

그러므로 $\overline{\mathrm{DQ}}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER})$

$=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$ ⋯ ㉠

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}=2\sqrt{3}\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{ER}$의 방향이 같을 때,

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$의 값이 최대이므로

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\le 2\sqrt{3}\times 2=4\sqrt{3}$

㉠에 의하여

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$

$\le 2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

따라서 $M=6\sqrt{3}$이므로 $M^2=108$