2021학년도 6월
전국연합학력평가

정답 및 해설

고1

• 수학 영역 •

정 답

1	⑤	2	②	3	①	4	⑤	5	③
6	③	7	④	8	②	9	①	10	⑤
11	①	12	③	13	④	14	④	15	③
16	⑤	17	②	18	②	19	④	20	①
21	⑤	22	5	23	4	24	22	25	2
26	3	27	24	28	120	29	45	30	38

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$3i+(1-2i)=1+(3i-2i)=1+i$ 이다.

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$$A-B=(2x^2+3xy+2y^2)-(x^2+5xy+3y^2)$$
$$=x^2-2xy-y^2 \text{ 이다.}$$

3. [출제의도] 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+4x+a$ 의 그래프가 x 축과 접하므로 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 판별식

$\frac{D}{4}=4-a=0$ 이다. 따라서 $a=4$ 이다.

4. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

부등식 $|x-2|<3$ 을 풀면 $-3<x-2<3$, $-1<x<5$ 이다.

부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 0, 1, 2, 3, 4 이다.

따라서 정수 x 의 개수는 5 이다.

5. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

x 에 대한 항등식이므로

$3x^2+ax+4=bx(x-1)+c(x-1)(x-2)$ 에

$x=1$ 을 대입하면 $a+7=0$ 이므로 $a=-7$ 이다.

$x=0$ 을 대입하면 $4=2c$ 이므로 $c=2$ 이다.

$x=2$ 를 대입하면 $2a+16=2b$, $-14+16=2b$ 이므로 $b=1$ 이다.

따라서 $a+b+c=-7+1+2=-4$ 이다.

6. [출제의도] 복소수 계산하기

$$x=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$y=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i \text{ 이므로}$$

$x+y=0$ 이다.

7. [출제의도] 곱셈 공식을 활용하여 도형 문제 해결하기

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BF}$ 의 길이를 각각 a, b, c 라 하자.

직육면체의 겉넓이가 148 이므로

$2(ab+bc+ca)=148$ 이다.

$ab+bc+ca=74 \cdots$ ㉠

모든 모서리의 길이의 합이 60 이므로

$4(a+b+c)=60$ 이다.

$a+b+c=15 \cdots$ ㉡

곱셈 공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 에

㉠, ㉡을 대입하면 $a^2+b^2+c^2=77$ 이다.

따라서

$$\overline{BG}^2+\overline{GD}^2+\overline{DB}^2=(b^2+c^2)+(a^2+c^2)+(a^2+b^2)$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$
$$=154 \text{ 이다.}$$

8. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 4 이므로

나머지정리에 의해 $f(1)=4$ 이다.

$f(1)=1+a+b+6=4$ 이므로 $a+b=-3 \cdots$ ㉠

$f(x+2)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$f(x+2)$ 는 $x-1$ 로 나누어떨어지므로

인수정리에 의해 $f(x+2)=(x-1)Q(x)$ 이다.

$x=1$ 을 대입하면 $f(3)=0$ 이므로 $9a+3b=-33$ 이다.

$3a+b=-11 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-4$, $b=1$ 이다.

따라서 $b-a=5$ 이다.

9. [출제의도] 인수분해 계산하기

$$x^3+x^2y-xy^2-y^3=x^2(x+y)-y^2(x+y)$$
$$=(x+y)^2(x-y)$$

$x=-2+3i$, $y=2+3i$ 이므로

$x-y=-4$, $x+y=6i$ 이다.

따라서 $(x+y)^2(x-y)=(6i)^2\times(-4)=144$ 이다.

10. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+6x-3$ 의 그래프와

직선 $y=kx-7$ 이 만나지 않으므로

$x^2+6x-3=kx-7$ 에서

이차방정식 $x^2+(6-k)x+4=0$ 의 판별식

$$D=(6-k)^2-16$$
$$=k^2-12k+20$$
$$=(k-2)(k-10)<0$$

$2<k<10$ 이므로 만족하는 자연수 $k=3$, 4, $\cdots$,9 이다. 따라서 자연수 k 의 개수는 7 이다.

11. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 항등식의 성질 이해하기

이차방정식 $x^2-2(m+a)x+m^2+m+b=0$ 이 중근을

가지므로 판별식 $\frac{D}{4}=(m+a)^2-m^2-m-b=0$ 이고

식을 m 에 대하여 정리하면 $(2a-1)m+a^2-b=0$ 이다.

실수 m 의 값에 관계없이 등식이 항상 성립하므로

$2a-1=0$, $a^2-b=0$ 이고 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $12(a+b)=12\times\frac{3}{4}=9$ 이다.

12. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

삼차방정식 $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)=0$ 이므로

α, β 는 $x^2+x+2=0$ 의 두 허근이다.

근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=2$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{1-4}{2}$$
$$=-\frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

[다른 풀이]

α, β 는 $x^2+x+2=0$ 의 두 허근이므로

$\alpha^2+\alpha+2=0$ 에서 $\alpha^2=-\alpha-2$ 이고, 같은 방법으로

$\beta^2=-\beta-2$ 이다. 따라서

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{-(\alpha+\beta)-4}{\alpha\beta}=-\frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

13. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y=-1 \cdots ㉠ \\ x^2-2y^2=-1 \cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀기 위해

㉠을 y 에 대하여 정리하면 $y=\frac{2x+1}{3}$ 이다.

이를 ㉡에 대입하면

$x^2-2\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2=-1$, $x^2-8x+7=0$ 이므로

$x=1$ 또는 $x=7$ 이다.

이를 ㉠에 대입하면

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ 이다.

조건에서 $\alpha\neq\beta$ 이므로 $\alpha=7$, $\beta=5$

따라서 $\alpha+\beta=7+5=12$ 이다.

14. [출제의도] 다항식의 연산을 활용한 실생활 문제 해결하기

물체 A 와 물체 B 의 질량을 각각 m_A, m_B 라 하고

물체 A 와 물체 B 의 속력을 각각 v_A, v_B 라 하자.

물체 A 의 질량이 물체 B 의 질량의 3 배이므로

$m_A=3m_B$ 이다.

물체 A 의 속력이 물체 B 의 속력의 $\frac{1}{2}$ 배이므로

$v_A=\frac{1}{2}v_B$ 이다.

물체 A 와 물체 B 의 구심력의 크기가 같으므로

$\frac{m_A(v_A)^2}{r_A}=\frac{m_B(v_B)^2}{r_B}$ 이다.

$\frac{3m_B\left(\frac{1}{2}v_B\right)^2}{r_A}=\frac{m_B(v_B)^2}{r_B}$ 이므로

$\frac{3\times\frac{1}{4}}{r_A}=\frac{1}{r_B}$ 이다. 따라서 $\frac{r_A}{r_B}=\frac{3}{4}$ 이다.

15. [출제의도] 이차함수를 활용한 실생활 문제 해결하기

b^2 의 최댓값을 구하기 위해 $f(a)=4a(10-a)$ 라 하면

$$f(a)=4a(10-a)\ \ (0<a<10)$$
$$=-4(a^2-10a)$$
$$=-4(a^2-10a+25)+100$$
$$=-4(a-5)^2+100 \text{ 이므로}$$

$f(a)$ 는 $a=5$ 일 때 최댓값 100 을 갖는다.

따라서 b^2 의 최댓값은 100 이다.

16. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

최고차항의 계수가 1 이고 조건 (나)에 의하여

$f(x)=(x-2)^2(x+a)+2(x-2)$ (a 는 상수)이다.

조건 (가)에 의하여

$f(0)=4a-4=0$ 이므로 $a=1$ 이다.

$$f(x)=(x-2)^2(x+1)+2(x-2)$$
$$=(x-2)\{(x-2)(x+1)+2\}$$
$$=(x-2)(x^2-x)$$
$$=(x-1)\{x(x-2)\} \text{ 이므로}$$

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫은 $Q(x)=x(x-2)$ 이다.

따라서 $Q(5)=15$ 이다.

[다른 풀이]

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이고 조건 (가)에 의하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 로 놓을 수 있다. (a, b 는 상수)

$f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 몫을 $P(x)$ 라 하면

조건 (나)에서 나머지가 $2(x-2)$ 이므로

$f(x)=(x-2)^2P(x)+2(x-2)$ 이다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 이므로

$x(x^2+ax+b)=(x-2)^2P(x)+2(x-2) \cdots$ ㉠

$x=2$ 를 ㉠에 대입하면 $2(4+2a+b)=0$ 에서

$b=-2a-4 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2P(x)+2(x-2)$

$x(x-2)(x+a+2)=(x-2)\{(x-2)P(x)+2\}$

$x(x+a+2)=(x-2)P(x)+2 \cdots$ ㉢

$x=2$ 를 ㉢에 대입하면 $2(2+a+2)=2$ 에서

$a=-3$ 이다.

$a=-3$ 을 ㉡에 대입하면
$b=2$ 이다.
$f(x)=x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$ 이므로
$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 할 때,
$Q(x)=x(x-2)$ 이다.
따라서 $Q(5)=15$ 이다.

17. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

이차방정식
$x^2-(a+4)x+3a+3=(x-3)\{x-(a+1)\}=0$ 의
근은 $x=3$, $x=a+1$ 이다. $0<a<2$ 이므로
$\mathrm{A}(a+1,\,0)$, $\mathrm{B}(3,\,0)$, $\mathrm{C}(0,\,3a+3)$ 이다.
삼각형 ABC 의 밑변의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}=2-a$ 이고
높이 $\overline{\mathrm{OC}}=3a+3$ 이다.
삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2}(2-a)(3a+3)=-\frac{3}{2}(a-2)(a+1)$$
$$=-\frac{3}{2}(a^2-a-2)$$
$$=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8} \text{ 이다.}$$

따라서 $0<a<2$ 에서 삼각형 ABC 의 넓이의 최댓값은
$a=\frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{27}{8}$ 이다.

18. [출제의도] 항등식을 활용한 나머지 추론하기

다항식 $(4x+2)^{10}$ 을 x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 R 이라 하면
$(4x+2)^{10}=xQ(x)+R$ 이고
$x=0$ 을 대입하면
$R=\boxed{1024}$ 이다.
$(4x+2)^{10}=xQ(x)+\boxed{1024}$ 에
$x=505$ 를 대입하면
$2022^{10}=505\times Q(505)+\boxed{1024}$ 이다.
나머지는 505 보다 작은 수이므로
$2022^{10}=505\times Q(505)+\boxed{1024}$
$=505\times Q(505)+505\times 2+14$
$=505\times\{Q(505)+\boxed{2}\}+\boxed{14}$ 이다.
2022^{10} 을 505 로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{14}$ 이다.
따라서 $a+b+c=1024+2+14=1040$ 이다.

19. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한 복소수 문제 해결하기

$z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$ 이므로
z, $\overline{z}$ 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 두 근이다.
양변에 $x-1$ 을 곱하면 $x^3-1=0$ 이므로 $x^3=1$ 이다.
그러므로 $z^3=1$, $(\overline{z})^3=1$ 이다.
따라서

$$\frac{\overline{z}}{z^5}+\frac{(\overline{z})^2}{z^4}+\frac{(\overline{z})^3}{z^3}+\frac{(\overline{z})^4}{z^2}+\frac{(\overline{z})^5}{z}$$
$$=\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}+\frac{1}{1}+\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}$$
$$=\frac{2\overline{z}}{z^2}+\frac{2(\overline{z})^2}{z}+1$$
$$=\frac{2z\overline{z}}{z^3}+\frac{2z^2(\overline{z})^2}{z^3}+1$$
$=2+2+1$
$=5$ 이다.

[다른 풀이]

$z^3=1$, $(\overline{z})^3$, $z\overline{z}=1$ 에서 $\overline{z}=\frac{1}{z}$ 이다.

$$\frac{\overline{z}}{z^5}+\frac{(\overline{z})^2}{z^4}+\frac{(\overline{z})^3}{z^3}+\frac{(\overline{z})^4}{z^2}+\frac{(\overline{z})^5}{z}$$
$$=(\overline{z})^6+(\overline{z})^6+(\overline{z})^6+(\overline{z})^6+(\overline{z})^6$$
$$=5(\overline{z})^6=5 \text{ 이다.}$$

20. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 도형 문제 해결하기

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times 3}{5}=108^\circ$ 이다.
$\triangle$ABE 는 이등변삼각형이고 $\angle$BAE $=108^\circ$ 이므로
$\angle$ABE $=36^\circ$ 이다.
$\triangle$BAC 는 이등변삼각형이고 $\angle$ABC $=108^\circ$ 이므로
$\angle$BAC $=36^\circ$ 이다.
$\angle$BAP $=\angle$ABP $=36^\circ$ 이므로 $\angle$APB $=108^\circ$ 이고
$\angle$APE $=72^\circ$ 이고 $\angle$EAP $=72^\circ$ 이다.
$\triangle$APE 는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PE}}=1$ 이다.
$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{PE}}:\overline{\mathrm{BP}}$
$x:1=1:(x-1)$
$x(x-1)=1$, $x^2-x-1=0$ 이다.
$x>0$ 이므로 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

$x^2=x+1$
$x^3=(x+1)x=2x+1$
$x^4=(2x+1)x=3x+2$
$x^5=(3x+2)x=5x+3$
$x^6=(5x+3)x=8x+5$
$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8$
$=1+(-x+x^2)+x^2(-x+x^2)+x^4(-x+x^2)$
$\quad+x^6(-x+x^2)$
$=1+1+x^2+x^4+x^6$
$=2+(x+1)+(3x+2)+(8x+5)$
$=12x+10$
$=12\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+10$
$=16+6\sqrt{5}$ 이므로
$p=16$, $q=6$ 이다.
따라서 $p+q=22$ 이다.

21. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 추론하기

조건 (가)에 의하여
$f(x)g(x)=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$ 이고
조건 (나)에 의하여
$f(x)=0$ 의 두 실근이 α, $\alpha+5$
즉, $f(x)=0$ 의 두 실근의 차가 5 이다.

따라서 $\begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ 이거나

$\begin{cases} f(x)=a(x+2)(x-3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x-2)(x+3) \end{cases}$ 이다. (단, $a\neq 0$ 는 상수)

ㄱ. $f(2)=0$ 이면 $\begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ 이므로

$g(3)=0$ 이다. (참)

ㄴ. $g(2)>0$ 이므로

$\begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ 이고, $a<0$ 인 상수이다.

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{11}{4}a<0$, $g\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{9}{4a}>0$

따라서 $f\left(\frac{5}{2}\right)<0<g\left(\frac{5}{2}\right)$ 이다. (참)

ㄷ.

(ⅰ) $\begin{cases} f(x)=a(x-2)(x+3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ (단, $a\neq 0$)인 경우

방정식

$$f(x)-g(x)=\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)x-6\left(a-\frac{1}{a}\right)=0$$

이 서로 다른 두 정수 근을 가지므로 이차방정식이다.

그러므로 $a-\frac{1}{a}\neq 0$, $a\neq\pm 1$ 이다.

$f(x)-g(x)=0$ 의 양변에 a 를 곱하면
$(a^2-1)x^2+(a^2+1)x-6(a^2-1)=0$ 이다.
근과 계수의 관계에 의해
$mn=-6$ 이고, m, n 이 정수이므로
$(m,\,n)=(-6,\,1)$, $(1,\,-6)$, $(-3,\,2)$, $(2,\,-3)$,
$(-2,\,3)$, $(3,\,-2)$, $(-1,\,6)$, $(6,\,-1)$
로 8 가지 경우이다.

① $(m,\,n)=(-6,\,1)$, $(1,\,-6)$ 인 경우
$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=-5$, $-a^2-1=-5a^2+5$
$a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ 이다.
x 에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은 $x=-6$, $x=1$ 을 두 정수 근으로 갖는다.

② $(m,\,n)=(-3,\,2)$, $(2,\,-3)$ 인 경우
$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=-1$, $-a^2-1=-a^2+1$
만족하는 a 의 값은 존재하지 않는다.
x 에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은 $x=-3$, $x=2$ 를 두 정수 근으로 가질 수 없다.

③ $(m,\,n)=(-2,\,3)$, $(3,\,-2)$ 인 경우
$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=1$, $-a^2-1=a^2-1$
$a=0$ 이다.
$a\neq 0$ 이므로 x 에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은 $x=-2$, $x=3$ 을 두 정수 근으로 가질 수 없다.

④ $(m,\,n)=(-1,\,6)$, $(6,\,-1)$ 인 경우
$m+n=\frac{-a^2-1}{a^2-1}=5$, $-a^2-1=5a^2-5$
$a=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ 이다.
x 에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은 $x=-1$, $x=6$ 을 두 정수 근으로 갖는다.

(ⅱ) $\begin{cases} f(x)=a(x+2)(x-3) \\ g(x)=\frac{1}{a}(x-2)(x+3) \end{cases}$ (단, $a\neq 0$)인 경우

$f(x)-g(x)=\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x-6\left(a-\frac{1}{a}\right)$ 에서

(ⅰ)과 같은 방법으로 하면 된다.
따라서 x 에 대한 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 이 서로 다른 두 정수 m, n 을 근으로 가지면 $|m+n|=5$ 이다. (참)

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(x+4)(2x^2-3x+1)=2x^3+5x^2-11x+4$ 이므로
x^2 의 계수는 5 이다.

23. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2+ax-4=0$ 의 두 근이 -4, b 이므로
근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합 $-4+b=-a$ 이고
두 근의 곱 $-4\times b=-4$ 이다.
따라서 $b=1$, $a=3$ 이므로 $a+b=4$ 이다.

24. [출제의도] 이차부등식 이해하기

이차부등식 $x^2+8x+(a-6)<0$ 이 해를 갖지 않도록 하기 위해서는 이차방정식 $x^2+8x+(a-6)=0$ 의
판별식 $\frac{D}{4}=4^2-(a-6)\leq 0$ 이어야한다.
따라서 $a\geq 22$ 이므로 최솟값은 22 이다.

25. [출제의도] 인수분해 추론하기

주어진 이차식을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6$
$=x^2+(ky+1)x-(3y-2)(y-3)$ 이다.
x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면
$(3y-2)-(y-3)=ky+1$ 이다.
y 의 계수를 비교하면 $k=2$ 이다.

[다른 풀이]

주어진 이차식을 x에 대한 내림차순으로 정리한 이차방정식은 $x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6=0$이다.
이때 $(ky+1)^2-4(-3y^2+11y-6)=A$라 하면
$x=\frac{-(ky+1)\pm\sqrt{A}}{2}$ 이다.
$x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6$
$=\left\{x-\frac{-(ky+1)+\sqrt{A}}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(ky+1)-\sqrt{A}}{2}\right\}$
이때 x, y에 대한 일차식이 되려면 A가 완전제곱식이어야 하므로 이차방정식 $A=0$의 판별식 $D=0$이다.
y에 대한 이차방정식
$(k^2+12)y^2+2(k-22)y+25=0$에 대해
$\frac{D}{4}=(k-22)^2-25(k^2+12)=0$이다.
식을 전개하여 인수분해하면
$6k^2+11k-46=(k-2)(6k+23)=0$이다.
따라서 자연수 k의 값은 2이다.

26. [출제의도] 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+5=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+5$
에서 꼭짓점의 x좌표는 $x=-\frac{b}{2a}<0$이고,
$a<0$이므로 $1\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$는 감소한다.
이차함수 $y=f(x)$의 최댓값은
$f(1)=a+b+5=3$이다.
$a+b=-2$이고 a, b는 음의 정수이므로
$a=-1$, $b=-1$이다.
따라서 $f(-2)=4a-2b+5=-4+2+5=3$이다.

27. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

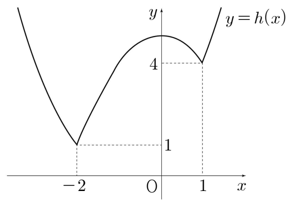
$z_1=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면 $z_1^{\,2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=-i$,
$z_1^{\,4}=\left(z_1^{\,2}\right)^2=(-i)^2=-1$, $z_1^{\,8}=\left(z_1^{\,4}\right)^2=(-1)^2=1$
이다.
$z_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면
$z_2^{\,2}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
$z_2^{\,3}=z_2^{\,2}\times z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{4i}{4}=i$
$z_2^{\,6}=\left(z_2^{\,3}\right)^2=i^2=-1$
$z_2^{\,12}=\left(z_2^{\,6}\right)^2=(-1)^2=1$이다.
$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=2$을 만족시키려면
$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n=1$과 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n=1$을 동시에 만족시키는 자연수 n을 찾아야 한다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 8, 12의 최소공배수인 24이다.

28. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 문제 해결하기

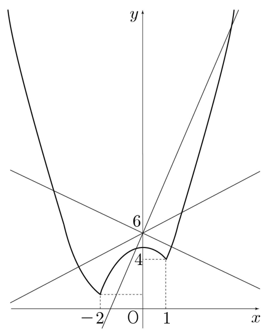
근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-b$이므로
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$\qquad=(-2a)^2+4b$
$\qquad=4a^2+4b$
$|\alpha-\beta|=2\sqrt{a^2+b}<12$ (a, b는 자연수)이므로
$a^2+b<36$이다.
$a=1$일 때, $b<35$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(1, 1)$, $(1, 2)$, $\cdots$, $(1, 34)$로 개수는 34이다.
$a=2$일 때, $b<32$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(2, 1)$, $(2, 2)$, $\cdots$, $(2, 31)$로 개수는 31이다.
$a=3$일 때, $b<27$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(3, 1)$, $(3, 2)$, $\cdots$, $(3, 26)$으로 개수는 26이다.
$a=4$일 때, $b<20$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(4, 1)$, $(4, 2)$, $\cdots$, $(4, 19)$로 개수는 19이다.
$a=5$일 때, $b<11$이므로 순서쌍 (a, b)는
$(5, 1)$, $(5, 2)$, $\cdots$, $(5, 10)$으로 개수는 10이다.
따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 총 개수는
$34+31+26+19+10=120$이다.

29. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용한 문제 해결하기

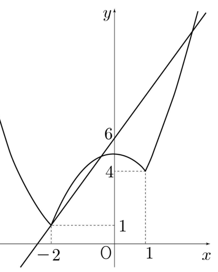
함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ g(x) & (-2<x<1) \end{cases}$
의 그래프를 그리면 아래의 그림과 같다.



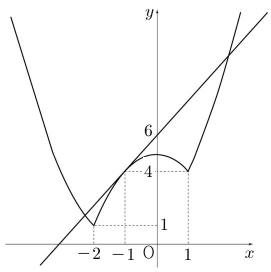
직선 $y=mx+6$의 y절편은 6이다.
y절편이 6인 직선의 기울기를 변화시키며 그래프를 그려보면



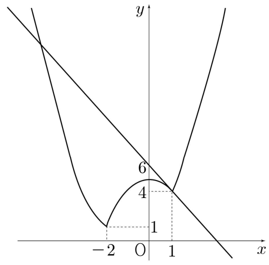
직선 $y=mx+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음 두 가지뿐이다.
(i) $y=mx+6$이 점 $(-2, 1)$을 지나는 경우



$y=mx+6$에 점 $(-2, 1)$을 대입하면
$1=-2m+6$, $m=\frac{5}{2}$이다.
(ii) $y=mx+6$이 $y=g(x)$에 접하는 경우
이차방정식 $-x^2+5=mx+6$, $x^2+mx+1=0$의 판별식 $D=m^2-4=0$이므로 $m=\pm 2$이다.
$m=2$인 경우, 아래의 그림과 같이 직선 $y=mx+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프는 점 $(-1, 4)$를 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.



$m=-2$인 경우, 아래의 그림과 같이 직선 $y=-2x+6$과 함수 $y=h(x)$의 그래프는 점 $(1, 4)$를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다.



(i), (ii)에 의해 모든 m의 값은 $\frac{5}{2}$, 2이다.
$S=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$이므로 $10S=10\times\frac{9}{2}=45$이다.

30. [출제의도] 여러 가지 방정식 문제 해결하기

다항식 $P_n(x)$를 x^2+x+1로 나눌 때 몫을 $A_n(x)$라 하자. $P_n(x)$가 x^2+x+1로 나누어떨어지므로
$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)-64$
$=(x^2+x+1)A_n(x)$이다.
이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근을 ω라고 하면
$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$이다.
ω는 $P_n(x)=0$의 근이므로 $P_n(\omega)=0$이다.
$Q_n(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)$
이라 할 때,
$P_n(\omega)=0$이 되려면 $Q_n(\omega)=64$이어야 한다.
$Q_5(\omega)=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$
$\qquad=(-\omega^2)\cdot(-\omega)\cdot 2\cdot(-\omega^2)\cdot(-\omega)=2$
$Q_6(\omega)=(-\omega^2)\cdot(-\omega)\cdot 2\cdot(-\omega^2)\cdot(-\omega)\cdot 2=4$
$Q_7(\omega)=Q_6(\omega)\cdot(-\omega^2)=4\cdot(-\omega^2)=-4\omega^2$
$Q_8(\omega)=Q_7(\omega)\cdot(-\omega)=(-4\omega^2)\cdot(-\omega)=4$
$Q_9(\omega)=Q_8(\omega)\cdot 2=4\cdot 2=8$
$Q_{10}(\omega)=Q_9(\omega)\cdot(-\omega^2)=-8\omega^2$
$Q_{11}(\omega)=Q_{10}(\omega)\cdot(-\omega)=8$
$\vdots$
$Q_{18}(\omega)=64$
$Q_{19}(\omega)=-64\omega^2$
$Q_{20}(\omega)=64$이다.
따라서 $n=18$ 또는 $n=20$이고
모든 자연수 n의 값의 합은 $18+20=38$이다.