• 수학 영역 •

정 답

1	④	2	③	3	④	4	⑤	5	⑤
6	③	7	①	8	①	9	③	10	②
11	②	12	①	13	③	14	②	15	①
16	③	17	④	18	②	19	⑤	20	②
21	⑤	22	12	23	18	24	3	25	6
26	7	27	25	28	10	29	13	30	31

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$1+2i+i(1-i)=1+2i+i+1=2+3i$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-2B=4x^2+2x-1-2(x^2+x-3)$
$=4x^2+2x-1-2x^2-2x+6=2x^2+5$

3. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 계산하기

$P(x)=x^3+x^2+x+1$ 이라 하자.
$P(x)$ 를 $2x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로
$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{15}{8}$ 이다.
따라서 나머지는 $\frac{15}{8}$ 이다.

4. [출제의도] 이차부등식 계산하기

이차항의 계수가 1이고 해가 $-4<x<3$ 인 이차부등식은 $(x+4)(x-3)<0$ 이다.
$x^2+x-12<0$ 이므로 $a=1$, $b=-12$ 이다.
따라서 $a-b=1-(-12)=13$ 이다.

5. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

부등식 $|x-2|<5$ 를 풀면
$-5<x-2<5$, $-3<x<7$ 이다.
부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은
-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 이다.
따라서 모든 정수 x 의 개수는 9이다.
[다른 풀이]
(i) $x<2$ 인 경우
$-x+2<5$ 이므로 $x>-3$ 이다.
따라서 $-3<x<2$ 이다.
(ii) $x\geq 2$ 인 경우
$x-2<5$ 이므로 $x<7$ 이다.
따라서 $2\leq x<7$ 이다.
(i), (ii)에 의해 $-3<x<7$ 이므로 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은
-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 이다.
따라서 모든 정수 x 의 개수는 9이다.

6. [출제의도] 인수분해 이해하기

101을 x 라 하면
$101^3-3\times101^2+3\times101-1=x^3-3x^2+3x-1$
$=(x-1)^3=(101-1)^3=100^3$ 이다.
따라서 주어진 식의 값은 $100^3=10^6$ 이다.

7. [출제의도] 방정식을 활용하여 실생활 문제 해결하기

올해 늘어난  모양의 밭의 넓이가 500이므로 올해 밭의 총넓이는 $10\times10+500=600$ 이다. 올해 밭의 총넓이에 관한 식을 세우면
$(10+x)(10+x-10)=600$ 이고
$x^2+10x-600=0$, $(x+30)(x-20)=0$ 에서
$x=-30$ 또는 $x=20$ 이다.
따라서 $x>10$ 이므로 $x=20$ 이다.

8. [출제의도] 항등식을 활용하여 다항식의 나눗셈 추론하기

x 에 대한 항등식이므로 $x=1$ 을 대입하면
$1-5+a+1=-1$ 이고 $a=2$ 이다.
$x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1$ 에서
$x=2$ 를 대입하면
$2^3-5\times2^2+2\times2+1=(2-1)\times Q(2)-1$ 이고
$8-20+4+1=Q(2)-1$ 이다.
따라서 $Q(2)=-6$ 이다.

9. [출제의도] 다항식의 곱셈공식을 이용하여 복소수 문제 해결하기

$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$ 이다.
$x=2+i$, $y=2-i$ 에서 $x+y=4$, $xy=5$ 이므로
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6$ 이다.
따라서
$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=6^2-5^2=11$
이다.

10. [출제의도] 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+2(a-1)x+2a+13$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2+2(a-1)x+2a+13=0$ 의 판별식
$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(2a+13)$
$=(a+2)(a-6)<0$
에서 $-2<a<6$ 이므로 정수 a 의 값은
-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 이다.
따라서 모든 정수 a 의 값의 합은 14이다.

11. [출제의도] 미정계수를 포함한 항등식 이해하기

주어진 방정식이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 1을 근으로 가지므로 $x=1$ 을 대입하면
$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$ 이다.
$-(p^2-2p+1)k+q+3=0$ 이 실수 k 에 대한 항등식이므로 $p^2-2p+1=0$, $q+3=0$ 에서
$p=1$, $q=-3$ 이다.
따라서 $p+q=-2$ 이다.

12. [출제의도] 곱셈공식을 활용하여 연립방정식 문제 해결하기

주어진 연립방정식
$$\begin{cases} x+y+xy=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y-xy=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$
에서 두 식 ㉠과 ㉡을 더하면 $3(x+y)=12$,
$x+y=4$ 이고 ㉠에 대입하면 $xy=4$ 이므로
$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=4$ 이다.
따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\times4=8$
이다.

13. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

조립제법을 이용하면
$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2 & -3 & -10 \\ & & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$
에서 $x^3+2x^2-3x-10=(x-2)(x^2+4x+5)$ 이므로 삼차방정식 $x^3+2x^2-3x-10=0$ 의 두 허근은 이차방정식 $x^2+4x+5=0$ 의 두 허근이고 $\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=5$ 이다.
따라서
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\times5\times(-4)$
$=-4$
이다.

14. [출제의도] 이차방정식 이해하기

x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx-k+20=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식
$\frac{D}{4}=k^2-(-k+20)=k^2+k-20=(k+5)(k-4)>0$
에서 $k<-5$ 또는 $k>4$ 이고 k 는 자연수이므로
$k>4$ …… ㉠
두 근의 곱 $\alpha\beta=-k+20$ 이 양수이므로
$k<20$ …… ㉡
㉠과 ㉡에 의해 k 의 범위는 $4<k<20$ 이고 이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 5, 6, $\cdots$, 19 이다.
따라서 모든 자연수 k 의 개수는 15이다.

15. [출제의도] 방정식과 부등식을 이용하여 다항식 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여
$P(x)+2x+3=ax(x-1)$ $(a<0)$
이므로 $P(x)=ax^2-(a+2)x-3$ 이다.
조건 (나)에 의하여 방정식
$ax^2-(a+2)x-3=-3x-2$
가 중근을 가지므로
$ax^2-(a-1)x-1=0$ 의 판별식
$D=(a-1)^2-4a\times(-1)=(a+1)^2=0$
에서 $a=-1$ 이다.
따라서 $P(x)=-x^2-x-3$ 에서 $P(-1)=-3$ 이다.

16. [출제의도] 이차함수를 이용하여 도형 문제 해결하기

$\overline{PQ}=x$ 이므로 $\overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2=1^2+x^2$ 이다.
$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2=(\sqrt{3}-x)^2+2(1+x^2)$
$=3x^2-2\sqrt{3}x+5$
$=3\left(x^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}x\right)+5$
$=3\left(x^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}x+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+5$
$=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4$
$\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2$ 은 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 최솟값 4를 가진다.
따라서 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=4$ 이므로 $\frac{m}{a}=4\sqrt{3}$ 이다.

17. [출제의도] 조립제법을 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

x 에 대한 다항식 x^3+x^2+ax+b 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면
$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & a & b \\ & & 1 & 2 & a+2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & a+2 & \boxed{a+b+2} \\ & & 1 & 3 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{a+5} & \end{array}$$
$a+b+2=0$, $a+5=0$ 이므로 $a=-5$, $b=3$ 이다.
따라서 $Q(x)=x+3$ 이므로
$Q(ab)=Q(-15)=-15+3=-12$ 이다.

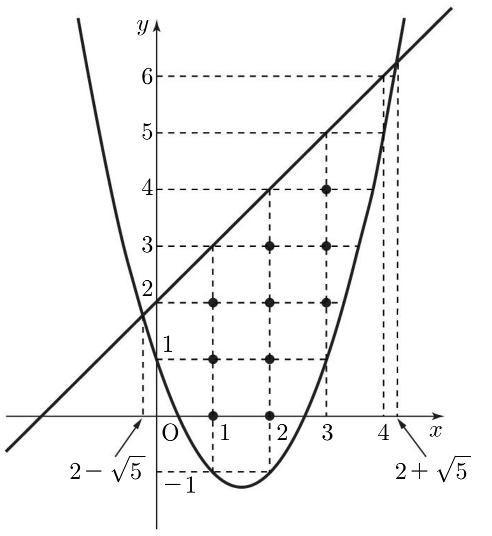
18. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 부등식 문제 해결하기

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ 라 하면 삼각형 ABC의 둘레의 길이가 10이고 $\overline{AB}=c$ 이므로
$a+b=\boxed{10-c}$ …… ㉠
이다. 삼각형 ABC가 직각삼각형이므로
$a^2+b^2=c^2$ 에서 $(a+b)^2-2ab=c^2$ …… ㉡

정답 및 해설

이다. ㉠을 ㉡에 대입하면 $(10-c)^2-2ab=c^2$에서
$ab=\boxed{50-10c}$이다.
a, b를 두 실근으로 가지고 이차항의 계수가 1인 x에 대한 이차방정식은
$x^2-(\boxed{10-c})x+(\boxed{50-10c})=0$ …… ㉢
이고 ㉢의 판별식 $D\ge 0$이다.
빗변의 길이 c는 양수이므로
부등식 $D\ge 0$의 해를 구하면
$D=(10-c)^2-4(50-10c)$
$\quad=c^2+20c-100\ge 0$
에서 $c\le -10-10\sqrt{2}$ 또는 $c\ge -10+10\sqrt{2}$이고
$c\ge \boxed{10(\sqrt{2}-1)}$이다.
㉢의 두 실근 a, b는 모두 양수이므로
두 근의 합 $\boxed{10-c}$와 곱 $\boxed{50-10c}$는 모두 양수이다. 따라서 빗변의 길이 c의 범위는
$\boxed{10(\sqrt{2}-1)}\le c<5$이다.
$f(c)=10-c$, $g(c)=50-10c$, $k=10(\sqrt{2}-1)$
이므로
$\frac{k}{25}\times f\left(\frac{9}{2}\right)\times g\left(\frac{9}{2}\right)$
$=\frac{10(\sqrt{2}-1)}{25}\times\left(10-\frac{9}{2}\right)\times\left(50-10\times\frac{9}{2}\right)$
$=11(\sqrt{2}-1)$
이다.

19. [출제의도] 이차함수의 성질 이해하기



이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와
직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2-3x+1=x+2$, $x^2-4x-1=0$에서
$x=2\pm\sqrt{5}$이다.
이차함수 $y=x^2-3x+1$의 그래프와
직선 $y=x+2$로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점의 x좌표를 p, y좌표를 q라 하면
$2-\sqrt{5}<p<2+\sqrt{5}$이다. $-1<2-\sqrt{5}<0$이고
$4<2+\sqrt{5}<5$이므로 $2-\sqrt{5}<p<2+\sqrt{5}$를
만족시키는 정수 p의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.
x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 (p, q)는 다음과 같다.
$p=0$일 때, $1<q<2$이므로 존재하지 않는다.
$p=1$일 때, $-1<q<3$이므로
$(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$이다.
$p=2$일 때, $-1<q<4$이므로
$(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$이다.
$p=3$일 때, $1<q<5$이므로
$(3, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$이다.
$p=4$일 때, $5<q<6$이므로 존재하지 않는다.
따라서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는 10이다.

20. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 활용하여 다항식 문제 해결하기

$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4=x^2-3ax+2a^2+4$
이다.
x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+2a^2+4=0$이 중근을 가지므로 판별식 $D=(3a)^2-4(2a^2+4)=0$이다.
$(3a)^2-4(2a^2+4)=9a^2-8a^2-16=a^2-16=0$
이므로 $a=4$ 또는 $a=-4$이다.
(i) $a=4$인 경우
$\{P(x)+2\}^2=x^2-12x+36=(x-6)^2$
이므로 $P(x)+2=x-6$ 또는 $P(x)+2=-x+6$
에서 $P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=-x+4$이다.
(ii) $a=-4$인 경우
$\{P(x)+2\}^2=x^2+12x+36=(x+6)^2$
이므로 $P(x)+2=x+6$ 또는 $P(x)+2=-x-6$
에서 $P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$이다.
(i)과 (ii)에 의해 조건을 만족시키는 일차다항식 $P(x)$는 $x-8$, $-x+4$, $x+4$, $-x-8$이고 모든 $P(1)$의 값은 -7, 3, 5, -9이다.
따라서 모든 $P(1)$의 값의 합은
$(-7)+3+5+(-9)=-8$이다.
[다른 풀이]
$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$에서
다항식 $P(x)$는 일차식이다.
$P(x)=px+q$ $(p\ne 0)$라 하자.
$(px+q+2)^2=(x-a)(x-2a)+4$에서
$p^2x^2+(2pq+4p)x+q^2+4q+4=x^2-3ax+2a^2+4$
이므로 $p^2=1$, $2pq+4p=-3a$,
$q^2+4q+4=2a^2+4$이다.
(i) $p=1$인 경우
$2q+4=-3a$, $q^2+4q=2a^2$에서 $(q-4)(q+8)=0$이므로 $q=4$ 또는 $q=-8$이다.
따라서 $P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=x-8$이다.
(ii) $p=-1$인 경우
$-2q-4=-3a$, $q^2+4q=2a^2$에서 $(q-4)(q+8)=0$
이므로 $q=4$ 또는 $q=-8$이다.
따라서 $P(x)=-x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$이다.
그러므로 $P(x)$는 $x+4$, $x-8$, $-x+4$, $-x-8$이고 모든 $P(1)$의 값은 5, -7, 3, -9이다.
따라서 모든 $P(1)$의 값의 합은
$5+(-7)+3+(-9)=-8$이다.

21. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

ㄱ. $a=\frac{3}{2}$일 때, $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+b$이고 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 5를 가지므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)=b=5$이다. (참)
ㄴ. $a\le 1$일 때, $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로 $f(1)=(1-a)^2+b=5$이고 $b=-a^2+2a+4$이다. (참)
ㄷ.
(i) $a\le 1$인 경우
ㄴ에서 $b=-a^2+2a+4$이므로
$a+b=-a^2+3a+4=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$이다.
따라서 $a+b$는 $a=1$에서 최댓값 6을 가진다.
(ii) $1<a\le 2$인 경우
$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $b=5$이므로
$6<a+b\le 7$이고 $a+b$는 $a=2$에서 최댓값 7을 가진다.
(iii) $a>2$인 경우
$f(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지고
$f(2)=(2-a)^2+b=5$, $b=-a^2+4a+1$에서
$a+b=-a^2+5a+1=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$이므로 $a+b$는 $a=\frac{5}{2}$에서 최댓값 $\frac{29}{4}$를 가진다.
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $a+b$의 최댓값은 $\frac{29}{4}$이다. (참)

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(x+2y)^3=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$이므로 xy^2의 계수는 12이다.

23. [출제의도] 복소수 계산하기

$(3+ai)(2-i)=(6+a)+(2a-3)i=13+bi$에서
$6+a=13$, $2a-3=b$이므로 $a=7$, $b=11$이다.
따라서 $a+b=18$이다.

24. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

연립방정식 $\begin{cases} x-y=-5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+y^2=20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
에서 ㉠을 y에 대해 정리하면 $y=x+5$이다.
㉠을 ㉡에 대입하면
$4x^2+(x+5)^2=20$, $5x^2+10x+5=0$에서 $x=-1$이고 ㉠에 대입하면 $y=4$이다.
따라서 $\alpha+\beta=(-1)+4=3$이다.

25. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

α, β는 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 두 근이므로
$\alpha^2-3\alpha+k=0$, $\beta^2-3\beta+k=0$에서
$\alpha^2-\alpha+k=2\alpha$, $\beta^2-\beta+k=2\beta$이고
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$이다. 따라서
$\frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}$
$=\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$
이므로 $k=6$이다.

26. [출제의도] 사차방정식 이해하기

주어진 사차방정식은 $x=\alpha$를 근으로 가지면
$x=-\alpha$도 근으로 가지므로 양의 실근 2개, 음의 실근 2개를 가짐을 알 수 있고 서로 다른 네 실근을
α, β, $-\beta(=\gamma)$, $-\alpha(=\delta)$ $(\alpha<\beta<0)$
으로 둘 수 있다.
$x^2=X$라 하면 주어진 사차방정식은
$X^2-(2a-9)X+4=0$이고 두 근은 α^2, β^2이다.
따라서 $\alpha^2+\beta^2=2a-9=5$이므로 $a=7$이다.

27. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

$(1-i)^{2n}=\{(1-i)^2\}^n=(-2i)^n=2^n(-i)^n$
이므로 $2^n(-i)^n=2^ni$에서 $(-i)^n=i$를 만족시키는 $n=4k+3$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 24)$이다.
따라서 100 이하의 모든 자연수 n의 개수는 25이다.

28. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

연립부등식
$\begin{cases} x^2-(a^2-3)x-3a^2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+(a-9)x-9a>0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
에서 이차부등식 ㉠의 해는
$x^2-(a^2-3)x-3a^2=(x-a^2)(x+3)<0$
이고 $-3<x<a^2$이다.
$a>2$이므로 이차부등식 ㉡의 해는
$x^2+(a-9)x-9a=(x+a)(x-9)>0$
이고 $x>9$ 또는 $x<-a$이다.
$a^2>10$이면 연립부등식의 해에 $x=10$이 포함되므로 정수 x가 존재한다. 그러므로 정수 x가 존재하지 않기 위한 a의 범위는 $a^2\le 10$에서
$2<a\le\sqrt{10}$이다. 따라서 a의 최댓값 $M=\sqrt{10}$
이므로 $M^2=10$이다.

29. **[출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식 추론하기**

(가)에서 $Q(1)=0$ 인 경우와 $Q(1)\neq 0$ 인 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $Q(1)=0$ 인 경우

$Q(x)=a(x-1)$ $(a\neq 0)$라 하면 (나)에 의해

$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2$

$\quad=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$

이고 (가)에 의해

$x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$ 이 x^2-3x+3 으로 나누어떨어져야 하므로

$$\begin{array}{r l}
 & x+(-a^2+3) \\
x^2-3x+3\,\big) & x^3 \quad -a^2x^2+\ (2a^2-10)x+13-a^2 \\
 & x^3 \quad -\ 3x^2+ \qquad\qquad 3x \\
\hline
 & (-a^2+3)x^2+\ (2a^2-13)x+13-a^2 \\
 & (-a^2+3)x^2-3(-a^2+3)x+3(-a^2+3) \\
\hline
 & \qquad\qquad (-a^2-4)x+4+2a^2
\end{array}$$

에서 $(-a^2-4)x+4+2a^2=0$ 을 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $Q(1)\neq 0$ 인 경우

$P(x)$ 는 x^2-3x+3 과 $x-1$ 을 인수로 가지고 (나)에 의해 $x^3-2x+1-P(x)$ 는 이차식이 되어야 하므로 $P(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이다.

$P(x)=(x^2-3x+3)(x-1)=x^3-4x^2+6x-3$

이고, (나)에 의해

$\{Q(x)\}^2=x^3-10x+13-P(x)$

$=x^3-10x+13-(x^3-4x^2+6x-3)=4x^2-16x+16$

이다.

$\{Q(x)\}^2=(2x-4)^2$ 이므로 $Q(x)=2x-4$ 또는 $Q(x)=-2x+4$ 이고 $Q(0)<0$ 에서 $Q(x)=2x-4$ 이다. 따라서 $P(2)+Q(8)=13$이다.

[다른 풀이]

(ⅰ) $Q(1)=0$ 인 경우

$Q(x)=a(x-1)$ $(a\neq 0)$라 하면 (나)에 의해

$P(x)=x^3-10x+13-\{Q(x)\}^2$

$\quad=x^3-a^2x^2+(2a^2-10)x+13-a^2$ …… ㉠

이다. (나)에 의해 $x^3-2x+1-P(x)$ 는 이차식이 되어야 하므로 $P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고 이차식 x^2-3x+3 과 일차식 $x-k$ 를 인수로 가지므로

$P(x)=(x^2-3x+3)(x-k)$

$\quad=x^3+(-k-3)x^2+(3k+3)x-3k$ …… ㉡

이다. ㉠과 ㉡에 의하여 $-a^2=-k-3$,

$2a^2-10=3k+3$, $13-a^2=-3k$ 를 만족시키는 a 와 k 는 존재하지 않는다.

30. **[출제의도] 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계 이해하기**

(가)에 의해 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 대칭축은 각각 $x=0$ 으로 같고 (나)에 의해 $f(0)$ 이 정수이므로 $g(0)$ 도 정수이다.

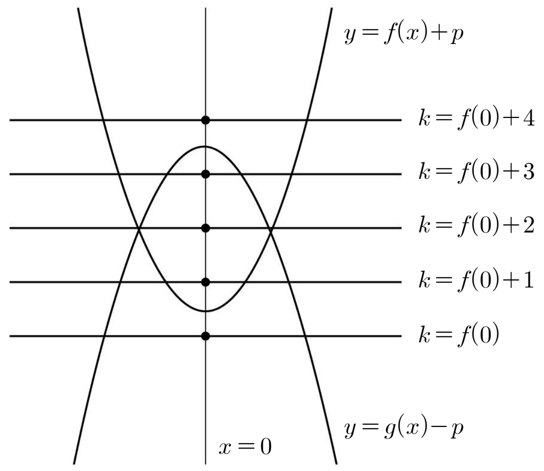
(ⅰ) $0\leq p<1$ 인 경우

$k=f(0)+1$, $f(0)+2$, $f(0)+3$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 2 로 같고

$k\leq f(0)$, $k\geq f(0)+4$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



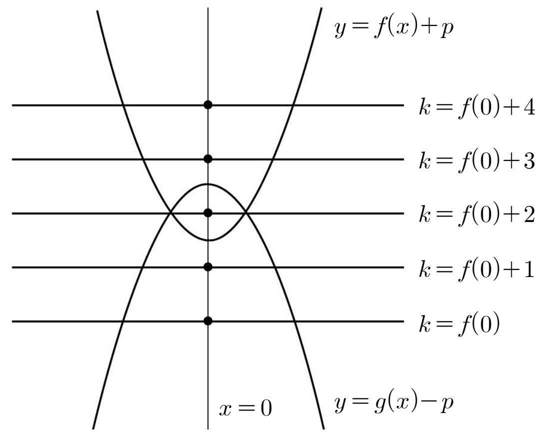
(ⅱ) $1\leq p<2$ 인 경우

$k=f(0)+2$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 2 로 같고

$k\leq f(0)+1$, $k\geq f(0)+3$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



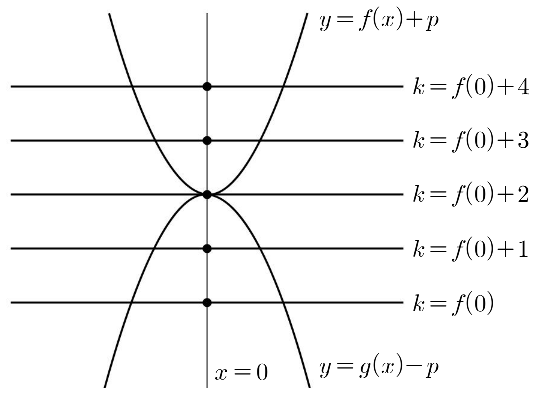
(ⅲ) $p=2$ 인 경우

$k=f(0)+2$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 1 로 같고

$k\neq f(0)+2$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



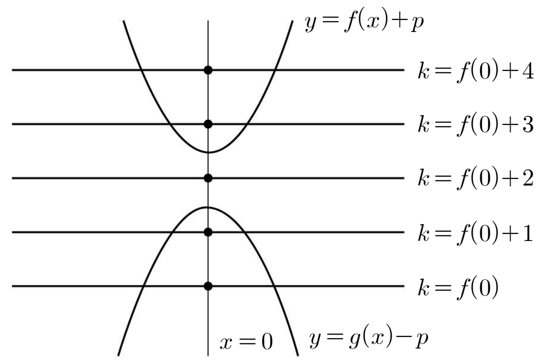
(ⅳ) $2<p\leq 3$ 인 경우

$k=f(0)+2$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 0 으로 같고

$k\neq f(0)+2$ 일 때,

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다르다.



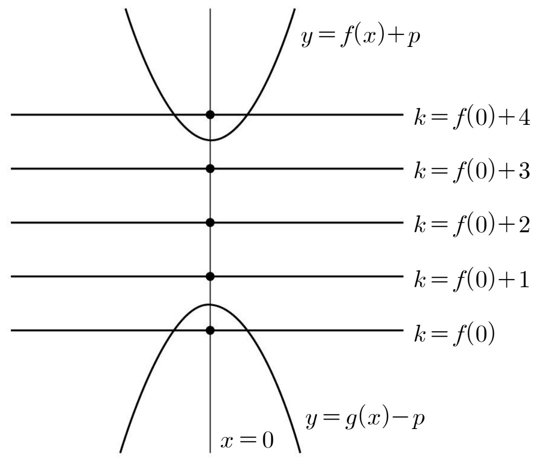
(ⅴ) $p>3$ 인 경우

모든 실수 x 에 대하여 $g(x)-p<f(x)+p$ 이므로

$g(0)-p<k<f(0)+p$ 인 정수 k 에 대하여

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 각각 같다.

이때 정수 k 의 개수는 3 이상이다.



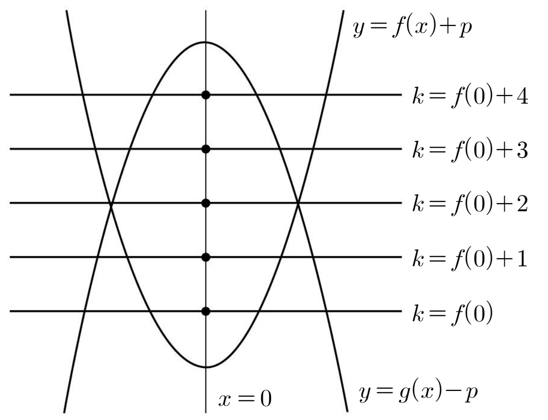
(ⅵ) $p<0$ 인 경우

$g(0)-p-\{f(0)+p\}>4$ 이므로

$f(0)+p<k<g(0)-p$ 인 정수 k 에 대하여

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 같다.

이때 정수 k 의 개수는 5 이상이다.



(ⅰ) ~ (ⅵ)에 의해

두 방정식 $f(x)+p=k$, $g(x)-p=k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 같게 되도록 하는 정수 k 의 개수가 1 일 때, 모든 실수 p 의 범위는 $1\leq p\leq 3$ 이므로

실수 p 의 최솟값은 1, 최댓값은 3 이다.

따라서 $m+10M=1+30=31$ 이다.