2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학 I ·수학 II]				
01.①	02.②	03.④	04.②	05.③
06.⑤	07.④	08.③	09.⑤	10.③
11.⑤	12.③	13.①	14.④	15.②
16.6	17.15	18.3	19.2	
20.13	21.426	22.19		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(-\sqrt{2})^4\times 8^{-\frac{2}{3}}$

$=(-1)^4\times\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4\times(2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=1\times 2^{\frac{1}{2}\times 4}\times 2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=2^2\times 2^{-2}$

$=2^{2+(-2)}$

$=2^0$

$=1$

정답 ①

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+9$에서

$f'(x)=3x^2$

이므로

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=3\times 2^2=12$

정답 ②

3. 출제의도 : 삼각함수의 정의를 이해하고, 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$이고

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\dfrac{4}{9}$

$=\dfrac{5}{9}$

따라서

$\sin^2\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{9}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

$=-\dfrac{1}{9}$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to 0-$일 때 $f(x)\to -2$이고,

$x\to 1+$일 때 $f(x)\to 1$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=(-2)+1=-1$

정답 ②

EBS

5. 출제의도 : 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_2+a_3=a_1r+a_1r^2$

$=\frac{1}{4}r+\frac{1}{4}r^2=\frac{3}{2}$

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

따라서

$a_6+a_7=a_1r^5+a_1r^6$

$=\frac{1}{4}\times2^5+\frac{1}{4}\times2^6$

$=24$

정답 ③

6. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이해하고 이를 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|f(-1)|$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1-}|x+a|$

$=|-1+a|$,

$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|x|=1$,

$|f(-1)|=|-1|=1$

이므로

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로 $a=2$

(ⅱ) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3-}|f(x)|=\lim_{x\to3+}|f(x)|=|f(3)|$

이어야 한다. 이때

$\lim_{x\to3-}|f(x)|=\lim_{x\to3-}|x|=3$,

$\lim_{x\to3+}|f(x)|=\lim_{x\to3+}|bx-2|$

$=|3b-2|$,

$|f(3)|=|3b-2|$

이므로

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로 $b=\frac{5}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

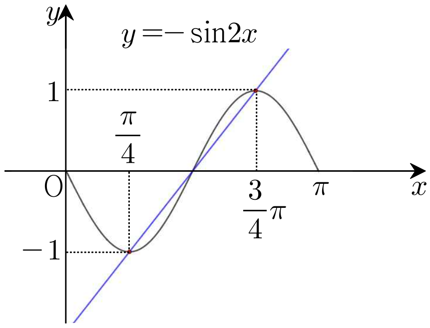
$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이해하여 곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=-\sin2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로 두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

정답 ④

8. **출제의도** : 평균값의 정리를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,5)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c) \cdots ㉠$$

를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$f'(c)\geq 5$

이므로 ㉠에서

$$\frac{f(5)-3}{4}\geq 5$$

$f(5)\geq 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

정답 ③

9. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$$h'(x)=3x^2-2x-1$$
$$=(3x+1)(x-1)$$

이므로

$h'(x)=0$

에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	$\searrow$	$5-a$	$\nearrow$

즉, $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a \le 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

정답 ⑤

10\. **출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \theta$, $\overline{AC} = a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta$

즉,

$2^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \frac{7}{8}$

$a^2 - \frac{21}{4}a + 5 = 0$,

$4a^2 - 21a + 20 = 0$

$(4a-5)(a-4) = 0$

따라서 조건에서 $a > 3$ 이므로 $a = 4$

$\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{a}{2} = 2$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AM} \times \cos\theta$

$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{7}{8}$

$= \frac{5}{2}$

이므로

$\overline{MB} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MA} \times \overline{MC} = \overline{MB} \times \overline{MD}$

에서

$2 \times 2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \overline{MD}$

따라서

$\overline{MD} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

정답 ③

11\. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$x_1(t) = \int_0^t (2-t)dt$

$= \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^t$

$= 2t - \frac{1}{2}t^2$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0$, $t^2 - 4t = 0$

$t(t-4) = 0$

$t = 4$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$\int_0^4 |3t|dt = \int_0^4 3tdt$

$= \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4$

$= 24$

정답 ⑤

EBS

12. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서

$a_5 \times a_7 < 0$

이므로

$a_5 < 0$, $a_7 > 0$

즉, $n \le 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \ge 7$일 때 $a_n > 0$이다.

이때 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

이므로

$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$(a_1+18)+(a_1+24)+(a_1+30)$

$= 6 - (a_1+3) - (a_1+9) + |a_1+15|$

$|a_1+15| = 5a_1 + 78$ ……㉠

㉠에서 $a_1 + 15 \ge 0$이면

$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$

$4a_1 = -63$

$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$이므로 ㉠에서

$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$

$6a_1 = -93$

$a_1 = -\frac{31}{2}$

따라서

$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$

$= -\frac{31}{2} + 27$

$= \frac{23}{2}$

정답 ③

13. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 구하고 이를 이용하여 간단한 지수방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64} = 16^{x_1}$에서

$2^{64} = 2^{4x_1}$

$4x_1 = 64$에서

$x_1 = 16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{P_n}$, $\mathrm{Q_n}$의 x좌표는 x_n으로 서로 같고, 두 점 $\mathrm{Q_n}$, $\mathrm{P_{n+1}}$의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$

이므로

$x_{n+1} = \frac{1}{4} x_n$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$

한편,

$x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5 \geq \frac{1}{k}$이고 $x_6 < \frac{1}{k}$

어어야 한다.

$x_5 \geq \frac{1}{k}$에서 $2^{-4} \geq \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16} \geq \frac{1}{k}$에서 $k \geq 16$ $\cdots$ ㉠

$x_6 < \frac{1}{k}$에서 $2^{-6} < \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64} < \frac{1}{k}$에서 $k < 64$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $16 \leq k < 64$이므로 자연수 k의 개수는 $64-16=48$이다.

정답 ①

14. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$

$x>0$일 때 $g'(x)=f(x)$

그런데, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)$

$-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$

$f(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로

$g(x)=x^2(x-a)$ (단, a는 상수)

로 놓으면

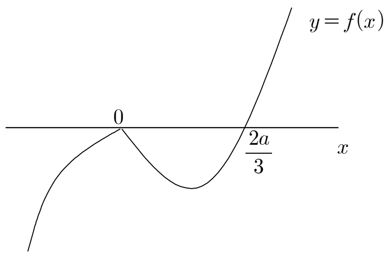
$g'(x)=2x(x-a)+x^2$

$\quad=x(3x-2a)$

(i) $a>0$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

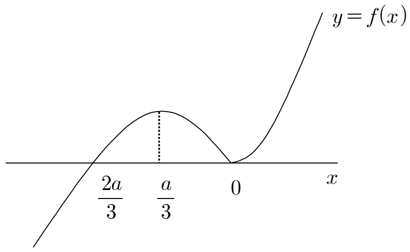
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a<0$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

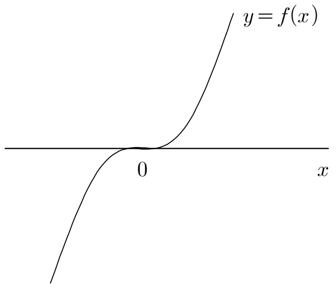


(iii) $a=0$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.

EBS



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서

$0<a<\dfrac{1}{2}$

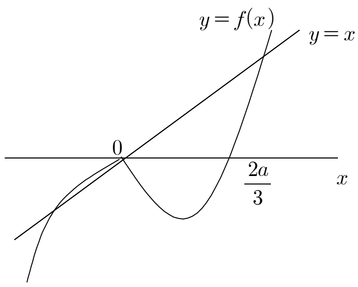
또한, $x<0$일 때

$f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$

이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=2a$

이때 $0<2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ii) ㄴ. (ii)의 경우

$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서

$-\dfrac{1}{2}<a<0$

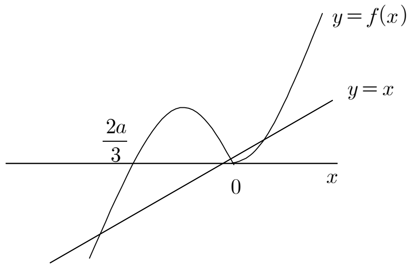
또한, $x>0$일 때

$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$

이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=-2a$

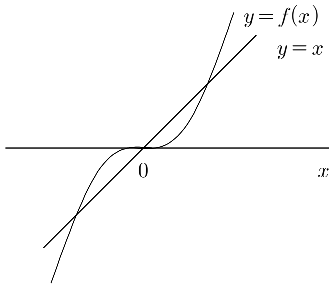
이때 $0<-2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(iii) ㄴ. (iii)의 경우

$f(1)=3$ 이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ④

<다른풀이>

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$0<a<\dfrac{1}{2}$이고

① $x<0$일 때, $-x(3x-2a)=x$

$-3x+2a=1$, $x=\dfrac{2a-1}{3}$

② $x \ge 0$일 때, $x(3x-2a)=x$

$x(3x-2a-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{2a+1}{3}$

따라서 $2<f(1)<4$일 때,
방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근

$\frac{2a-1}{3}$, 0, $\frac{2a+1}{3}$을 갖는다.

15. 출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=0$이므로

$a_2=a_1+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}$

$a_2>0$이므로

$a_3=a_2-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$

$a_3<0$이므로

$a_4=a_3+\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$a_5=a_4-\frac{1}{k}=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$

$a_5<0$이므로

$a_6=a_5+\frac{1}{k+1}=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}=\frac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 $n=5m-4$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}\ne 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로

$a_7=a_6-\frac{1}{k}=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}$

$a_7<0$이므로

$a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=\frac{k-3}{k(k+1)}$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.

$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\ne 0$이다.

$5\le k\le 9$이면 $a_{22}\ne 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.

$k\ge 11$이면 $a_{22}\ne 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+10=14$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에서

$x+2>0$이고 $x-2>0$

이어야 하므로

$x>2$ ⋯ ㉠

$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)$

$=\log_2(x+2)(x-2)$

$=\log_2(x^2-4)$

$=5$

에서

$x^2-4=2^5$

$x^2=36$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$x=6$

정답 6

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int(8x^3+6x^2)dx$$

$$=2x^4+2x^3+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로

$f(0)=C=-1$

따라서

$f(x)=2x^4+2x^3-1$

그러므로

$f(-2)=32-16-1=15$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=4\sum_{k=1}^{10}k+10a$$

$$=4\times\frac{10\times11}{2}+10a$$

$$=220+10a$$

즉, $220+10a=250$이므로

$10a=30$

따라서

$a=3$

정답 3

19. 출제의도 : 사차함수의 극대, 극소를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=4+2a=0$

에서

$a=-2$

그러므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

정답 2

20. 출제의도 : 정적분으로 나타낸 함수를 이해하고 극소값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이면

$$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$$

$$=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

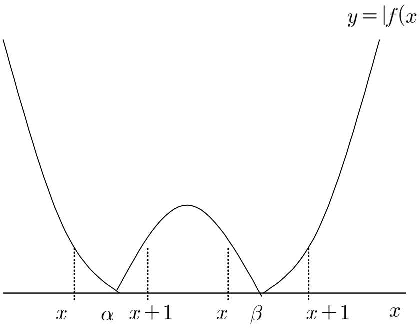
이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다.

따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하면

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고

$x=1$, $x=4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$ 이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$g(x)$

$=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{\alpha}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$\qquad -\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$\qquad -\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$

$\qquad -2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)$

$\qquad =6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$

$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0$ ⋯㉠

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$g(x)$

$=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{\beta}\{-f(t)\}dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$

$=\int_{\beta}^{x}f(t)dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$

$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$\qquad +\int_{\beta}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$\qquad +\int_{\beta-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$

$\qquad +2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(4)=2(4-\alpha)(4-\beta)+2(5-\alpha)(5-\beta)$

$\qquad =82-18\alpha-18\beta+4\alpha\beta=0$

$9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha\beta=\frac{13}{2}$

이므로

$f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$

정답 13

21. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 자연수를 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\log_8\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2=8^m$ (m은 정수) ⋯⋯㉠

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n=3k-1$ (k는 $1 \le k \le 333$인 자연수)
이어야 한다. 이때 ㉠에서

$$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2 = 2^{3m}$$

$$16(k+1)^2 = 2^{-3m}$$

$$(k+1)^2 = 2^{-3m-4}$$

이어야 하므로

$$(k+1)^2 = 2^2,\ 2^8,\ 2^{14}$$

$$k+1 = 2,\ 2^4,\ 2^7$$

$k=1$ 또는 $k=15$ 또는 $k=127$

즉, $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므로 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$$2+44+380=426$$

정답 426

22. **출제의도** : 연속함수의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x \ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = g(0) \ \cdots \ ㉠$$

이 성립한다.

이때

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-}(x+3)f(x) = 3f(0),$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+}(x+a)f(x-b) = af(-b),$$

$$g(0) = af(-b)$$

이므로 ㉠에서

$$3f(0) = af(-b) \ \cdots \ ㉡$$

한편,

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$\cdots$ ㉢

이때 $t \ne -3$이고 $t \ne 6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|} \ \cdots \ ㉣$$

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$이 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$ 뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로

$f(6-b)=0$에서

$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

(i) $b=9$인 경우

$x<0$에서

$$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$$

이때

$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k \ge 0$ 또는 $k=3$ $\cdots$ ㉤

$x \geq 0$에서 **정답** 19

$g(x) = (x+a)f(x-9)$

$\quad = (x+a)(x-6)(x-9+k)$

이때 $x \geq 0$에서 $g(x) = 0$의 해는 6뿐이므로

$9-k < 0$ 또는 $9-k = 6$ … ㉥

㉤, ㉥에서

$k = 3$

따라서 $f(x) = (x+3)^2$이므로 ㉡에서

$3 \times 3^2 = af(-9)$, $27 = 36a$

$a = \frac{3}{4}$

따라서

$g(4) = (4+a)f(4-b)$

$= \left(4 + \frac{3}{4}\right)f(-5)$

$= \frac{19}{4} \times (-2)^2 = 19$

(ⅱ) $k-b = -6$인 경우

$x < 0$에서

$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$

이때 $x < 0$에서 $g(x) = 0$의 해는 -3뿐이므로서

$-k \geq 0$ 또는 $k = 3$

$x \geq 0$에서

$g(x) = (x+a)f(x-b)$

$= (x+a)(x-b+3)(x-b+k)$

$= (x+a)(x-b+3)(x-6)$

이때 $x \geq 0$에서 $g(x) = 0$의 해는 6뿐이고, $b > 3$이므로

$b-3 = 6$에서

$b = 9$

$k-b = -6$에서

$k = 3$

따라서 (ⅰ)과 같은 결과이므로

$g(4) = 19$이다.

■ [선택: 기하]
23. ③ 24. ② 25. ② 26. ⑤
27. ④ 28. ① 29. 23 30. 8

23. **출제의도** : 두 벡터가 서로 평행할 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+k\vec{b}$가 서로 평행하므로

$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$

를 만족하는 실수 l이 존재한다.

$3\vec{a}+k\vec{b}=l(\vec{a}+2\vec{b})$에서

$3\vec{a}+k\vec{b}=l\vec{a}+2l\vec{b}$

$3=l$, $k=2l$

따라서 $k=6$

정답 ③

24. **출제의도** : 쌍곡선의 주축의 길이와 점근선을 이용하여 두 초점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6 이므로

$2a=6$

$a=3$ …… ㉠

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 점근선은

$y=\dfrac{b}{a}x$, $y=-\dfrac{b}{a}x$

이때, $a>0$, $b>0$이므로

$\dfrac{b}{a}=2$

$b=2a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b=2\times3=6$

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}(-c,\ 0)$ $((c>0)$

이라 하면

$c^2=a^2+b^2$

$=3^2+6^2$

$=45$

$c=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\mathrm{c}=6\sqrt{5}$

정답 ②

25. **출제의도** : 좌표평면에서 두 직선의 방향벡터를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 직선

$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-5}{3}$, $x-1=\dfrac{2-y}{3}$

즉,

$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-5}{3}$, $x-1=\dfrac{y-2}{-3}$

의 방향벡터를 각각 $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$라 하면

$\vec{d_1}=(4,\ 3)$

$\overrightarrow{d_2}=(1,\ -3)$

따라서

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{d_1}\cdot\overrightarrow{d_2}|}{|\overrightarrow{d_1}||\overrightarrow{d_2}|}$$

$$=\frac{|4\times1+3\times(-3)|}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{5}{5\sqrt{10}}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

정답 ②

26. 출제의도 : 타원의 접선의 방정식을 이용하여 사각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x\pm\sqrt{3\times1+1}$

즉, $y=x\pm2$

직선 $y=x+2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 B이고 직선 $y=x-2$와 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$이 접하는 점이 D일 때, 사각형 ABCD의 넓이는 최대이다.

두 직선 $y=x+2$, $y=x-1$ 사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y=x+2$ 위의 점 $(0,\ 2)$에서 직선 $y=x-1$ 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$$d_1=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

두 직선 $y=x-2$, $y=x-1$ 사이의 거리를 구해 보자.

직선 $y=x-2$ 위의 점 $(0,\ -2)$에서 직선 $y=x-1$ 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{|0-(-2)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

한편, 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$와 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점 A, C의 좌표를 구해 보자.

$\frac{x^2}{3}+(x-1)^2=1$에서

$2x(2x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$x=0$일 때, $y=-1$

$x=\frac{3}{2}$일 때, $y=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

두 점 A, C가

$\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{C}(0,\ -1)$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_1+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times d_2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=3$$

정답 ⑤

EBS

27. **출제의도** : 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

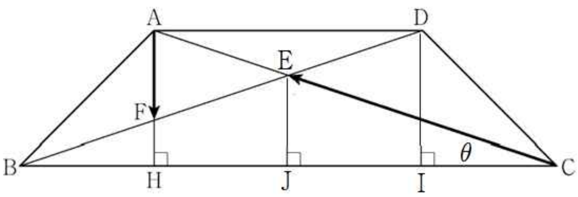
정답풀이 :

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=45^{\circ}$

이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=1$



점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{BI}=3$, $\overline{DI}=1$이고

$\triangle BID \backsim \triangle BHF$이므로

$\overline{BI}:\overline{DI}=\overline{BH}:\overline{FH}$

즉, $3:1=1:\overline{FH}$

$\overline{FH}=\dfrac{1}{3}$

$\overline{AF}=\overline{AH}-\overline{FH}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

한편 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{BJ}=\overline{CJ}=2$, $\overline{BH}=\overline{HJ}=1$

이므로

$\overline{EJ}=2\overline{FH}=\dfrac{2}{3}$

직각삼각형 JCE에서

$\angle JCE=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}$

이고,

두 벡터 $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{CE}$가 이루는 각의 크기는

$\dfrac{\pi}{2}+\theta$이다.

그리고

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EJ}$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}&=\overrightarrow{EJ}\cdot\overrightarrow{CE}\\&=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\&=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times(-\sin\theta)\\&=|\overrightarrow{EJ}||\overrightarrow{CE}|\times\left(-\frac{|\overrightarrow{EJ}|}{|\overrightarrow{CE}|}\right)\\&=-|\overrightarrow{EJ}|^2\\&=-\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&=-\frac{4}{9}\end{aligned}$$

정답 ④

28. **출제의도** : 쌍곡선의 성질과 쌍곡선의 접선을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 양수 a, b에 대하여 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하자.

이 쌍곡선이 점 $(3,\ 3)$을 지나고 점 $(3,\ 3)$에서 직선 $y=2x-3$에 접할 때, $\overline{PB}-\overline{PA}$는 최대이다.

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(3,\ 3)$에서

의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$$

즉, $y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{3}$

이 직선이 $y=2x-3$이므로

$\frac{b^2}{a^2}=2$, $-\frac{b^2}{3}=-3$에서

$a^2=\frac{9}{2}$, $b^2=9$

두 점 A, B가 쌍곡선의 초점이므로

$$c^2=a^2+b^2=\frac{9}{2}+9=\frac{27}{2}$$

따라서 $c=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

정답 ①

29. 출제의도 : 포물선의 정의와 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=8x$의 초점은 $F(2,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-2$이다.

점 P의 x좌표를 $a(0<a<2)$라 하면

$P(a,\ 2\sqrt{2a})$

$F'(-2,\ 2\sqrt{2a})$

포물선의 성질에 의해

$\overline{PF}=\overline{PF'}=2+a$

한편, 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$(y-2\sqrt{2a})^2=-4(2+a)(x-a)$

이 포물선의 준선의 방정식은

$x=2a+2$

점 Q에서 두 직선 $x=-2$, $x=2a+2$에 내린 수선의 발을 각각

R, S라 하면

포물선의 성질에 의해

$\overline{QF}=\overline{QR}$,

$\overline{QF'}=\overline{QS}$

이므로

$\overline{QF}+\overline{QF'}=\overline{QR}+\overline{QS}=\overline{RS}=2a+4$

사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12이므로

$\overline{PF}+\overline{PF'}+\overline{QF}+\overline{QF'}=12$에서

$2\overline{PF'}+\overline{RS}=12$

$2(2+a)+(2a+4)=12$

$4a=4$

$a=1$

이때, P의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$이고

점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는

포물선의 방정식은

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$

이다.

두 포물선

$y^2=8x$ …… ㉠

$(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$ …… ㉡

이 만나는 점 Q의 y좌표를 구해 보자.

㉠에서

$x=\frac{y^2}{8}$

$x=\frac{y^2}{8}$을 ㉡에 대입하면

$(y-2\sqrt{2})^2=-12\left(\frac{y^2}{8}-1\right)$

$5y^2-8\sqrt{2}y-8=0$

$(y-2\sqrt{2})(5y+2\sqrt{2})=0$

$y=2\sqrt{2}$ 또는 $y=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$

점 Q의 y좌표는 $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$이다.

점 Q에서 선분 PF′에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}=2-(-1)=3$

$\overline{\mathrm{QH}}=2\sqrt{2}-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)=\frac{12}{5}\sqrt{2}$

삼각형 PF′Q의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PF'}}\times\overline{\mathrm{QH}}$

$=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{12}{5}\sqrt{2}$

$=\frac{18}{5}\sqrt{2}$

따라서 $p=5$, $q=18$이므로

$p+q=5+18=23$

정답 23

30. 출제의도 : 벡터의 성질을 이용하여 벡터의 크기의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$이므로

선분 CA, CB, CD, CE, CF의 중점을 각각 A′, B′, D′, E′, F′이라 하면

점 X는 정육각형 A′B′CD′E′F′ 위의 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직인다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}+2\overrightarrow{\mathrm{XD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$이므로

$(\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CX}})-\overrightarrow{\mathrm{CX}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CX}})=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

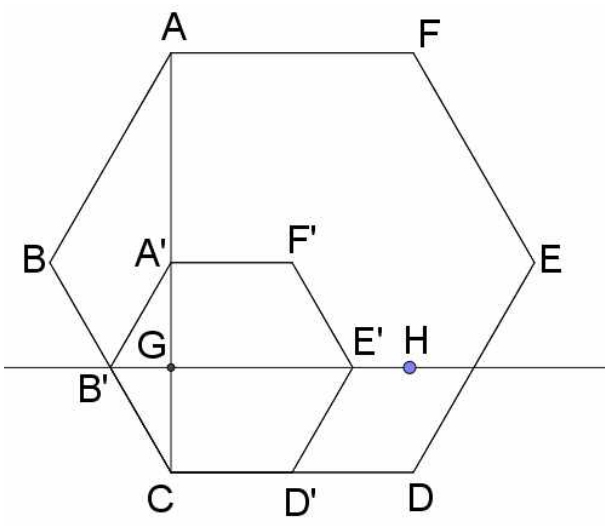
$\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}$라 하면

점 X는 점 G를 지나고 직선 CD에 평행한 직선 위를 움직인다.

직선 GE′ 위의 점 H가

$\overline{\mathrm{E'H}}=1$, $\overline{\mathrm{GH}}>\overline{\mathrm{GE'}}$

를 만족시키도록 점 H를 잡는다.



X가 점 G일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값은 최소이다.

$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$에서

$\frac{2-k}{4}=0$

$k=2$

즉, $\alpha=2$

점 X가 점 H일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값은 최대이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=4$에서

$\left|\frac{2-k}{4}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|=4$,

즉 $\frac{2-k}{4}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=4$이므로

$\frac{2-k}{4}\times 4=4$

$k=-2$

즉, $\beta=-2$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=2^2+(-2)^2=8$

정답 8