2023학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학 Ⅰ·수학 Ⅱ]

01.①	02.②	03.④	04.②	05.③
06.⑤	07.④	08.③	09.⑤	10.③
11.⑤	12.③	13.①	14.④	15.②
16.6	17.15	18.3	19.2	
20.13	21.426	22.19		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$

$=(-1)^4 \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}}$

$=1 \times 2^{\frac{1}{2}\times 4} \times 2^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$=2^2 \times 2^{-2}$

$=2^{2+(-2)}$

$=2^0$

$=1$

정답 ①

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+9$에서

$f'(x)=3x^2$

이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$=3\times 2^2=12$

정답 ②

3. **출제의도** : 삼각함수의 정의를 이해하고, 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos^2\theta=\frac{4}{9}$이고

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\frac{4}{9}$

$=\frac{5}{9}$

따라서

$\sin^2\theta+\cos\theta=\frac{5}{9}+\left(-\frac{2}{3}\right)$

$=-\frac{1}{9}$

정답 ④

4. **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\to 0-$일 때 $f(x)\to -2$이고,

$x\to 1+$일 때 $f(x)\to 1$이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=(-2)+1=-1$

정답 ②

5. 출제의도 : 등비수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 공비를 $r(r>0)$라 하면

$$a_2+a_3=a_1r+a_1r^2$$
$$=\frac{1}{4}r+\frac{1}{4}r^2=\frac{3}{2}$$

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$r>0$이므로 $r=2$

따라서

$$a_6+a_7=a_1r^5+a_1r^6$$
$$=\frac{1}{4}\times 2^5+\frac{1}{4}\times 2^6$$
$$=24$$

정답 ③

6. 출제의도 : 함수의 연속의 정의를 이해하고 이를 이용하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|x+a|$$
$$=|-1+a|,$$
$$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|x|=1,$$
$$|f(-1)|=|-1|=1$$

이므로

$|-1+a|=1$

$a>0$이므로 $a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|f(x)|=|f(3)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3-}|x|=3,$$
$$\lim_{x\to 3+}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|bx-2|$$
$$=|3b-2|,$$
$$|f(3)|=|3b-2|$$

이므로

$|3b-2|=3$

$b>0$이므로 $b=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에 의하여

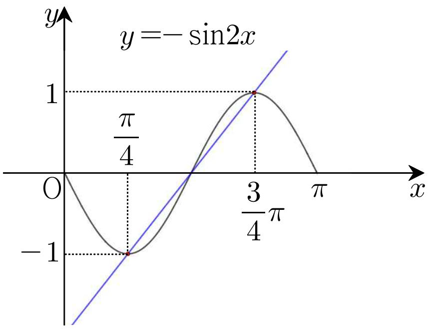
$$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이해하여 곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=-\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 최솟값

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

을 갖고, $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sin\frac{3}{2}\pi=1$

을 갖는다.

따라서 $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{4}$이므로 두 점 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\ -1\right)$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

정답 ④

8. 출제의도 : 평균값의 정리를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,5]$에서 연속이고 열린구간 $(1,5)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)\cdots ㉠$$

를 만족하는 상수 c가 열린구간 $(1,5)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, 조건 (나)에 의하여

$f'(c)\geq 5$

이므로 ㉠에서

$$\frac{f(5)-3}{4}\geq 5$$

$f(5)\geq 23$

따라서 $f(5)$의 최솟값은 23이다.

정답 ③

9. 출제의도 : 도함수를 활용하여 함수의 최솟값을 구하고 이를 부등식에 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+6-a$

이때 $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면 $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0 이상이어야 한다.

$$\begin{aligned}h'(x)&=3x^2-2x-1\\&=(3x+1)(x-1)\end{aligned}$$

이므로

$h'(x)=0$

에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$6-a$	↘	$5-a$	↗

즉, $x\geq 0$에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 $5-a$이므로 주어진 조건을 만족시키려면 $5-a\geq 0$이어야 한다.

따라서 $a \le 5$이므로 구하는 실수 a의 최댓값은 5이다.

정답 ⑤

10. **출제의도** : 코사인법칙을 이용하여 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \theta$, $\overline{AC} = a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\theta$

즉,

$$2^2 = 3^2 + a^2 - 2 \times 3 \times a \times \frac{7}{8}$$

$$a^2 - \frac{21}{4}a + 5 = 0,$$

$4a^2 - 21a + 20 = 0$

$(4a - 5)(a - 4) = 0$

따라서 조건에서 $a > 3$ 이므로 $a = 4$

$$\overline{AM} = \overline{CM} = \frac{a}{2} = 2$$

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{MB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AM} \times \cos\theta$

$$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{7}{8}$$

$$= \frac{5}{2}$$

이므로

$$\overline{MB} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$\overline{MA} \times \overline{MC} = \overline{MB} \times \overline{MD}$

에서

$$2 \times 2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \times \overline{MD}$$

따라서

$$\overline{MD} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

정답 ③

11. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$$x_1(t) = \int_0^t (2 - t)dt$$

$$= \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^t$$

$$= 2t - \frac{1}{2}t^2$$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0,\ t^2 - 4t = 0$$

$t(t - 4) = 0$

$t = 4$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |3t|dt = \int_0^4 3t dt$$

$$= \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4$$

$$= 24$$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서
$a_5 \times a_7 < 0$
이므로
$a_5 < 0$, $a_7 > 0$
즉, $n \le 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \ge 7$일 때 $a_n > 0$이다.
이때 조건 (나)에서
$\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$
이므로
$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$
$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$
$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로
$(a_1+18)+(a_1+24)+(a_1+30)$
$= 6-(a_1+3)-(a_1+9)+|a_1+15|$
$|a_1+15| = 5a_1+78$ ……㉠
㉠에서 $a_1+15 \ge 0$이면
$a_1+15 = 5a_1+78$
$4a_1 = -63$
$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$
이므로 조건을 만족시키지 않는다.
즉, $a_1+15 < 0$이므로 ㉠에서
$-a_1-15 = 5a_1+78$
$6a_1 = -93$
$a_1 = -\frac{31}{2}$
따라서
$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$
$= -\frac{31}{2} + 27$
$= \frac{23}{2}$

정답 ③

13. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 구하고 이를 이용하여 간단한 지수방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :
점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.
이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로
$2^{64} = 16^{x_1}$에서
$2^{64} = 2^{4x_1}$
$4x_1 = 64$에서
$x_1 = 16$
같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{P_n}$, $\mathrm{Q_n}$의 x좌표는 x_n으로 서로 같고, 두 점 $\mathrm{Q_n}$, $\mathrm{P_{n+1}}$의 y좌표는 같으므로
$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}$
즉,
$2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$
이므로
$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$
따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로
$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$

한편,

$x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5 \geq \frac{1}{k}$이고 $x_6 < \frac{1}{k}$

어어야 한다.

$x_5 \geq \frac{1}{k}$에서 $2^{-4} \geq \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16} \geq \frac{1}{k}$에서 $k \geq 16$ ⋯ ㉠

$x_6 < \frac{1}{k}$에서 $2^{-6} < \frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64} < \frac{1}{k}$에서 $k < 64$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $16 \leq k < 64$이므로 자연수 k의 개수는 $64-16=48$이다.

정답 ①

14. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$

$x>0$일 때 $g'(x)=f(x)$

그런데, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} \{-f(x)\} = \lim_{x \to 0+} f(x)$

$-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$

$f(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로

$g(x)=x^2(x-a)$ (단, a는 상수)

로 놓으면

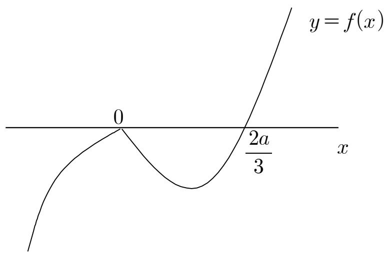
$g'(x)=2x(x-a)+x^2$

$=x(3x-2a)$

(i) $a>0$일 때

$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$

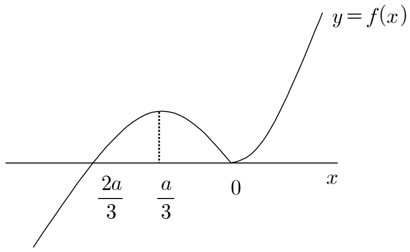
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $a<0$일 때

$f(x)=\begin{cases} -x(3x-2a) & (x<0) \\ x(3x-2a) & (x \geq 0) \end{cases}$

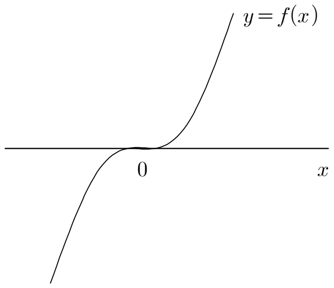
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.



(iii) $a=0$일 때

$f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<0) \\ 3x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서

$0<a<\dfrac{1}{2}$

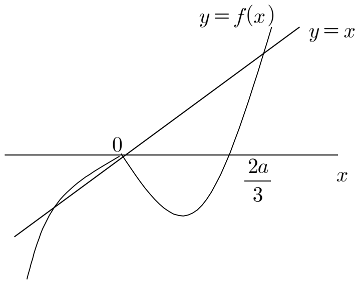
또한, $x<0$일 때

$f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$

이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)=2a$

이때 $0<2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(ii) ㄴ. (ii)의 경우

$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서

$-\dfrac{1}{2}<a<0$

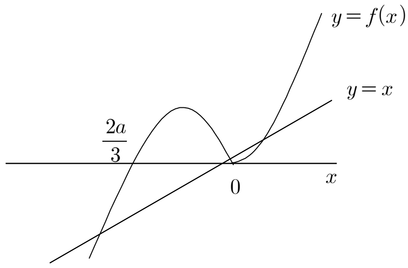
또한, $x>0$일 때

$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$

이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=-2a$

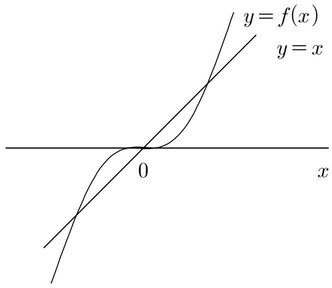
이때 $0<-2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

(iii) ㄴ. (iii)의 경우

$f(1)=3$ 이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.



따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

정답 ④

<다른풀이>

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우

$0<a<\dfrac{1}{2}$이고

① $x<0$일 때, $-x(3x-2a)=x$

$-3x+2a=1$, $x=\dfrac{2a-1}{3}$

② $x \ge 0$일 때, $x(3x-2a)=x$
$x(3x-2a-1)=0$
$x=0$ 또는 $x=\frac{2a+1}{3}$
따라서 $2<f(1)<4$일 때,
방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근
$\frac{2a-1}{3}$, 0, $\frac{2a+1}{3}$을 갖는다.

15. 출제의도 : 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$a_1=0$이므로
$a_2=a_1+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}$
$a_2>0$이므로
$a_3=a_2-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$
$a_3<0$이므로
$a_4=a_3+\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k(k+1)}$
이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.
한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로
$a_5=a_4-\frac{1}{k}=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$
$a_5<0$이므로
$a_6=a_5+\frac{1}{k+1}=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}=\frac{k-2}{k(k+1)}$
이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 $n=5m-4$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}\neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.
한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로
$a_7=a_6-\frac{1}{k}=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}$
$a_7<0$이므로
$a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=\frac{k-3}{k(k+1)}$
마찬가지 방법으로 계속하면
$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.
$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\neq 0$이다.
$5\le k\le 9$이면 $a_{22}\neq 0$이다.
$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.
$k\ge 11$이면 $a_{22}\neq 0$이다.
따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은
1, 3, 10
이므로 구하는 모든 k의 값의 합은
$1+3+10=14$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
진수조건에서
$x+2>0$이고 $x-2>0$
이어야 하므로
$x>2$ … ㉠
$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)$
$=\log_2(x+2)(x-2)$
$=\log_2(x^2-4)$
$=5$
에서
$x^2-4=2^5$

$x^2=36$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$x=6$

정답 6

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int(8x^3+6x^2)dx$

$=2x^4+2x^3+C$ (단, C는 적분상수)

이므로

$f(0)=C=-1$

따라서

$f(x)=2x^4+2x^3-1$

그러므로

$f(-2)=32-16-1=15$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=4\sum_{k=1}^{10}k+10a$

$=4\times\frac{10\times11}{2}+10a$

$=220+10a$

즉, $220+10a=250$이므로

$10a=30$

따라서

$a=3$

정답 3

19. 출제의도 : 사차함수의 극대, 극소를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=4+2a=0$

에서

$a=-2$

그러므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 4를 가지므로

$f(0)=b=4$

따라서 $a+b=(-2)+4=2$

정답 2

20. 출제의도 : 정적분으로 나타낸 함수를 이해하고 극소값을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq0$이면

$g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{x+1}f(t)dt$

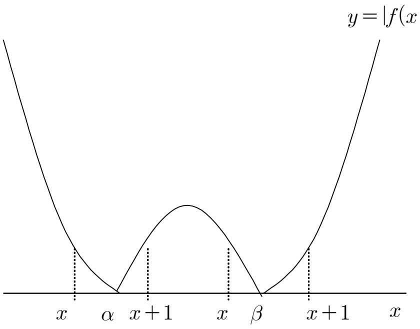
이므로 $g(x)$는 이차함수이고 이때 $g(x)$가 극소인 x의 값은 1개뿐이다.

따라서 조건을 만족시키지 못한다.

$f(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha<\beta)$라 하면

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같고

$x=1$, $x=4$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로 $g'(1)=0$, $g'(4)=0$ 이다.



(i) $x<\alpha<x+1$일 때

$g(x)$

$=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{\alpha}f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+1}\{-f(t)\}dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}f(t)dt-\int_{\alpha}^{x+1}f(t)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$-\int_{\alpha}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$=-\int_{\alpha}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$-\int_{\alpha-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$

$-2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(1)=-2(1-\alpha)(1-\beta)-2(2-\alpha)(2-\beta)$

$=6\alpha+6\beta-4\alpha\beta-10=0$

$3\alpha+3\beta-2\alpha\beta-5=0\cdots$㉠

(ii) $x<\beta<x+1$일 때

$g(x)$

$=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$

$=\int_x^{\beta}\{-f(t)\}dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$

$=\int_{\beta}^{x}f(t)dt+\int_{\beta}^{x+1}f(t)dt$

$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$+\int_{\beta}^{x+1}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$=\int_{\beta}^{x}2(t-\alpha)(t-\beta)dt$

$+\int_{\beta-1}^{x}2(t+1-\alpha)(t+1-\beta)dt$

이므로

$g'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$

$+2(x+1-\alpha)(x+1-\beta)$

$g'(4)=2(4-\alpha)(4-\beta)+2(5-\alpha)(5-\beta)$

$=82-18\alpha-18\beta+4\alpha\beta=0$

$9\alpha+9\beta-2\alpha\beta-41=0\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha\beta=\frac{13}{2}$

이므로

$f(0)=2\alpha\beta=2\times\frac{13}{2}=13$

정답 13

21. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 모든 자연수를 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\log_8\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2=8^m$ (m은 정수) $\cdots\cdots$㉠

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n=3k-1$ (k는 $1 \le k \le 333$인 자연수)
이어야 한다. 이때 ㉠에서

$$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2 = 2^{3m}$$

$$16(k+1)^2 = 2^{-3m}$$

$$(k+1)^2 = 2^{-3m-4}$$

이어야 하므로

$$(k+1)^2 = 2^2,\ 2^8,\ 2^{14}$$

$$k+1 = 2,\ 2^4,\ 2^7$$

$k=1$ 또는 $k=15$ 또는 $k=127$

즉, $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므로 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$$2+44+380=426$$

정답 426

22. **출제의도** : 연속함수의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x \ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = g(0) \ \cdots \ ㉠$$

이 성립한다.

이때

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0-} (x+3)f(x) = 3f(0),$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} (x+a)f(x-b) = af(-b),$$

$$g(0)=af(-b)$$

이므로 ㉠에서

$$3f(0)=af(-b) \ \cdots \ ㉡$$

한편,

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to -3} \frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$\cdots$ ㉢

이때 $t\ne -3$이고 $t\ne 6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$f(x)=(x+3)(x+k)$ (k는 상수)

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3} \frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3} \frac{|x+k|}{2|g(t)|} \ \cdots \ ㉣$$

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$이 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$ 뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$g(6)=0$, 즉 $(6+a)f(6-b)=0$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로

$f(6-b)=0$에서

$6-b=-3$ 또는 $6-b=-k$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

(i) $b=9$인 경우

$x<0$에서

$$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$$

이때

$x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$-k \ge 0$ 또는 $k=3 \ \cdots$ ㉤

$x \geq 0$에서

정답 19

$g(x) = (x+a)f(x-9)$

$\quad = (x+a)(x-6)(x-9+k)$

이때 $x \geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로

$9-k<0$ 또는 $9-k=6$ ⋯ ㉥

㉤, ㉥에서

$k=3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서

$3 \times 3^2 = af(-9)$, $27=36a$

$a = \frac{3}{4}$

따라서

$g(4) = (4+a)f(4-b)$

$= \left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)$

$= \frac{19}{4} \times (-2)^2 = 19$

(ⅱ) $k-b=-6$인 경우

$x<0$에서

$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로서

$-k \geq 0$ 또는 $k=3$

$x \geq 0$에서

$g(x) = (x+a)f(x-b)$

$= (x+a)(x-b+3)(x-b+k)$

$= (x+a)(x-b+3)(x-6)$

이때 $x \geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로

$b-3=6$에서

$b=9$

$k-b=-6$에서

$k=3$

따라서 (ⅰ)과 같은 결과이므로

$g(4)=19$이다.

■ [선택: 미적분]
23. ① 24. ① 25. ② 26. ②
27. ③ 28. ⑤ 29. 50 30. 16

23. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
주어진 식의 분자와 분모에

$$\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}$$

을 각각 곱하면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2} \\ &= \frac{1+1}{2}=1\end{aligned}$$

정답 ①

24. **출제의도** : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x^2-y\ln x+x=e$
의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-\frac{dy}{dx}\times\ln x-y\times\frac{1}{x}+1=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-\frac{y}{x}+1}{\ln x}$$

그러므로 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2e-\frac{e^2}{e}+1}{\ln e}=e+1$$

정답 ①

25. **출제의도** : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수이므로
$x=y^3+2y+3$ ----㉠
$x=3$일 때,
$3=y^3+2y+3$
$y(y^2+2)=0$
$y=0$
또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1=(3y^2+2)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+2}$$

따라서,

$$g'(3)=\frac{1}{3\times0^2+2}=\frac{1}{2}$$

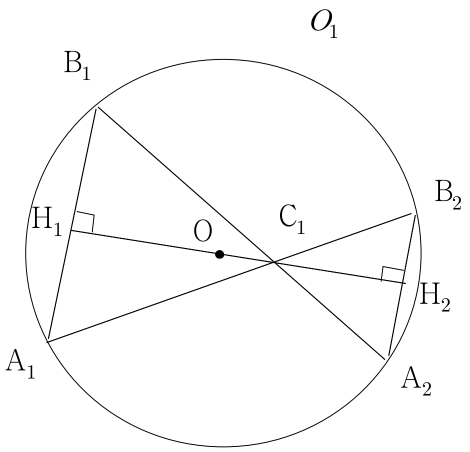
정답 ②

26. **출제의도** : 도형에 활용된 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{A_2B_2}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하면 점 $\mathrm{H_1}$은 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 중점이고 점 $\mathrm{H_2}$는 선분 $\mathrm{A_2B_2}$의 중점이다.

또, $\overline{\mathrm{A_1B_1}} // \overline{\mathrm{A_2B_2}}$이므로 세 점 $\mathrm{H_1, O, H_2}$는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle \mathrm{A_1B_1A_2} = \dfrac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{\mathrm{B_1C_1}} = \overline{\mathrm{B_1H_1}} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

그러므로 삼각형 $\mathrm{A_1C_1B_1}$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

또,

$$\angle \mathrm{A_1B_2A_2} = \angle \mathrm{A_1B_1A_2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle \mathrm{A_2C_1B_2} = \angle \mathrm{A_1C_1B_1} = \frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 $\mathrm{C_1A_2B_2}$는 정삼각형이다.

이때,

$$\overline{\mathrm{C_1A_2}} = \overline{\mathrm{B_1A_2}} - \overline{\mathrm{B_1C_1}} = 3 - 2 = 1$$

이므로 삼각형 $\mathrm{C_1A_2B_2}$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$$S_1 = 2 \times (\triangle \mathrm{A_1A_2B_1} - \triangle \mathrm{A_1C_1B_1})$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt{3}$$

또, 두 삼각형 $\mathrm{A_1A_2B_1}$, $\mathrm{A_2A_3B_2}$에서

$\overline{\mathrm{A_1A_2}} // \overline{\mathrm{A_2A_3}}$, $\overline{\mathrm{A_1B_1}} // \overline{\mathrm{A_2B_2}}$,

$\overline{\mathrm{A_2B_1}} // \overline{\mathrm{A_3B_2}}$

이고

$\overline{\mathrm{A_1B_1}} = 2$, $\overline{\mathrm{A_2B_2}} = 1$

이므로 두 삼각형 $\mathrm{A_1A_2B_1}$, $\mathrm{A_2A_3B_2}$의 닮음비는 $2:1$이다.

따라서, 넓이의 비는 $4:1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 급수의 수렴조건을 이해하고 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4이므로 공차를 d라 하면

$$a_n = 4 + (n-1)d$$

이때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2} \right)$$

이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+(n-1)d}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d+\frac{4-d}{n}}{1}-\frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$
$$=d-3=0$$

그러므로

$d=3$

이때, $a_n=3n+1$이므로 주어진 급수에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

정답 ③

28. 출제의도 : 미분과 주어진 조건을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$$\begin{cases} x=1\text{일 때}, f(1)=0 \\ x\neq 1\text{일 때}, f(x)\neq 0 \end{cases} \quad \text{--㉠}$$

한편,

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x)\neq 0)$$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지고 ㉠을 만족해야 하므로

$$f'(2)=0 \quad \text{----㉡}$$

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식

$$g(x)=0$$

은

$$\ln|f(x)|=0$$
$$|f(x)|=1$$
$$f(x)=-1 \text{ 또는 } f(x)=1$$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고 ㉠을 만족하려면 함수 $y=f(x)$는 극값을 가져야 한다.

한편, ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

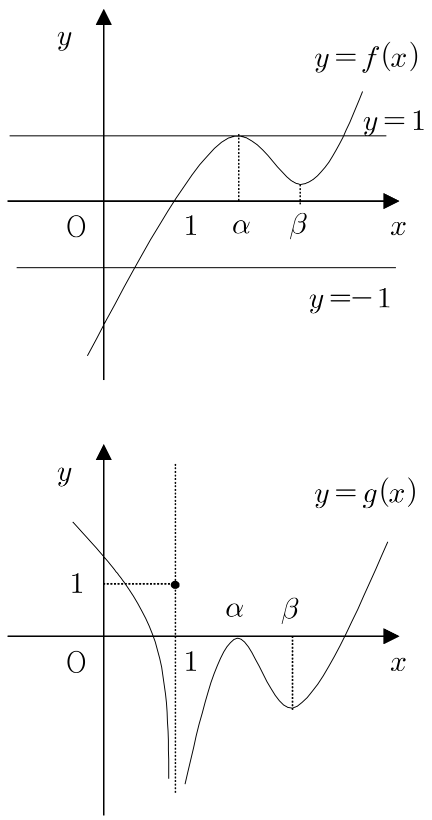
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0\ (1<\alpha<\beta)$

로 놓을 수 있다.

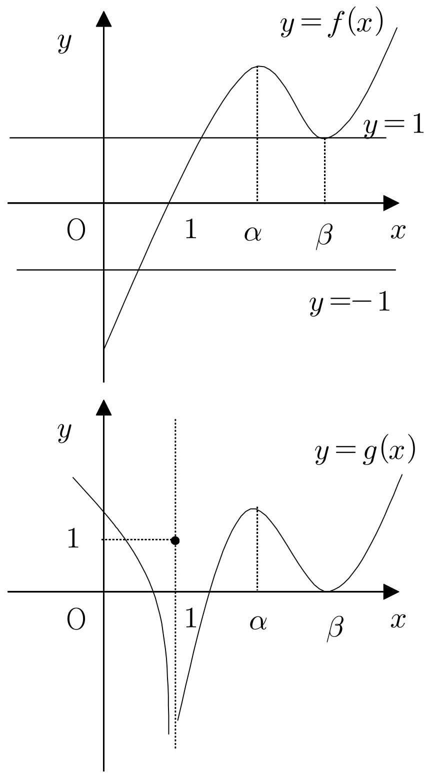
이때, $\alpha=2$이거나 $\beta=2$이다.

이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i)



(ii)



이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소이기 위해서는 그림 (i)과 같아야 하고

$\alpha=2$

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)$ (k는 상수)

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$

이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$

$1-k=-2$

$k=3$

이때,

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6)+(x-2)\} \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(3x-8) \end{aligned}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

그러므로 $\beta=\frac{8}{3}$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고 그 값은

$$\begin{aligned} \ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right| &= \ln\left|\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right| \\ &= \ln\frac{25}{27} \end{aligned}$$

정답 ⑤

29. **출제의도** : 도형에 활용된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 AHP에서 $\angle APH=\theta$이므로

$$\angle HAP=\frac{\pi}{2}-\theta$$

한편, 삼각형 OPA는

$\overline{OP}=\overline{OA}=1$

인 이등변삼각형이므로

$$\angle AOP=\pi-2\times\angle HAP$$
$$=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=2\theta$$

그러므로

$$\overline{AH}=1-\overline{OH}$$
$$=1-\overline{OP}\cos 2\theta$$
$$=1-\cos 2\theta \quad ----㉠$$

또,

$$\angle HAQ=\frac{1}{2}\angle HAP$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\overline{HQ}=\overline{AH}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=(1-\cos 2\theta)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \quad ---㉡$$

㉠과 ㉡에서

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{HQ}$$
$$=\frac{1}{2}\times(1-\cos 2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos 2\theta)^2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

그러므로

$$\lim_{\theta\to 0-}\frac{f(\theta)}{\theta^4}$$
$$=\frac{1}{2}\times 16\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{(1+\cos 2\theta)^2}$$
$$\times\lim_{\theta\to 0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times 16\times 1^2\times\frac{1}{4}\times 1$$
$$=2 \quad ------㉢$$

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 ㉠에서 $\angle H'OP=\theta$이므로

$$\overline{AP}=2\overline{PH'}$$
$$=2\times\overline{OP}\times\sin\theta$$
$$=2\sin\theta$$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$$\overline{AO}:\overline{AP}=\overline{OR}:\overline{RP}$$
$$1:2\sin\theta=\overline{OR}:1-\overline{OR}$$
$$2\sin\theta\times\overline{OR}=1-\overline{OR}$$
$$\overline{OR}=\frac{1}{1+2\sin\theta} \quad ----㉣$$

또,

$$\overline{OS}=\overline{OA}\tan(\angle SAO)$$
$$=1\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \quad ----㉤$$

㉣과 ㉤에서

$$g(\theta)=\triangle OSP-\triangle OSR$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OP}\times\sin(\angle POS)$$
$$-\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\overline{OR}\times\sin(\angle POS)$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{OS}\times\sin(\angle POS)\times(\overline{OP}-\overline{OR})$$

$$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2\sin\theta+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$\times\frac{2\sin\theta}{2\sin\theta+1}$$

그러므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to0+}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$$\times2\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\sin\theta+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times2\times1\times1=1 \quad ----ⓑ$$

따라서, ⓒ과 ⓑ을 이용하면

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{g(\theta)}{\theta}}{\frac{f(\theta)}{\theta^4}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

이므로

$$100k=100\times\frac{1}{2}=50$$

정답 50

30. 출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를 개형을 그릴 수 있으며 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}=(x^2-ax)e^{-x}$$

이므로

$$f'(x)=(2x-a)e^{-x}+(x^2-ax)e^{-x}\times(-1)$$

$$=e^{-x}\{-x^2+(a+2)x-a\}$$

$$=-e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$$x^2-(a+2)x+a=0 \quad ---ⓐ$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=(a+2)^2-4a$$

$$=a^2+4>0$$

또, ⓐ의 서로 다른 두 근은

$$x=\frac{(a+2)\pm\sqrt{a^2+4}}{2} \quad ---ⓛ$$

이때, $a>0$이므로

$$a+2=\sqrt{(a+2)^2}>\sqrt{a^2+4}$$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

ⓛ의 두 근을 α, $\beta(0<\alpha<\beta)$라 하면 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

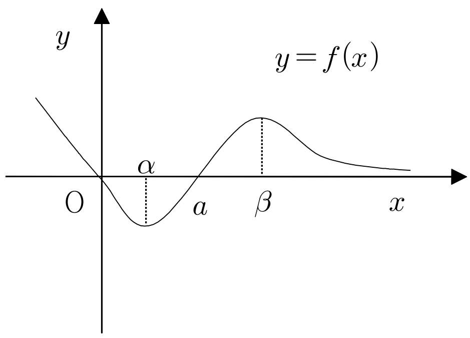
이때,

$f(0)=0$, $f(a)=0$

이고

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



EBS

또,

$$f''(x)=e^{-x}\{x^2-(a+2)x+a\}$$
$$-e^{-x}\{2x-(a+2)\}$$
$$=e^{-x}\{x^2-(a+4)x+2a+2\}$$

이때, $f''(x)=0$에서

$x^2-(a+4)x+2a+2=0$ ----ⓛ

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+4)^2-4\times1\times(2a+2)$

$=a^2+8>0$

그러므로 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수

$y=f(x)$, $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

의 그래프의 교점의 개수이다.

이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선이다.

한편, 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 연속이면

$g(a)=\lim\limits_{t\to a}g(t)$

이므로

$g(a)+\lim\limits_{t\to a}g(t)$

의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

$g(5)+\lim\limits_{t\to 5}g(t)=5$ ---- ⓒ

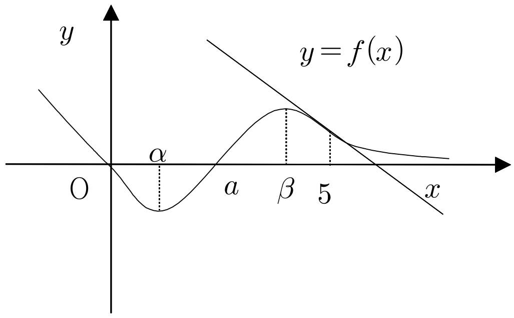
이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다.

함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.

한편, 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 m이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=m$에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값을 n이라 하면 함수 $g(t)$는 $t=n$에서 극한값을 갖는다.

그러므로 ⓒ을 만족시키는 t의 값은 함수 $f(x)$가 변곡점을 갖는 x의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 변곡점을 갖고 이때

$\lim\limits_{t\to 5}g(t)=3$, $g(5)=2$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$가 방정식 ⓛ의 근이므로 대입하면

$5^2-(a+4)\times5+2a+2=0$

$-3a+7=0$

$a=\dfrac{7}{3}$ ---ⓒ

한편,

$$\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$$

를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다.

㉠에 ⓒ을 대입하면

$$x^2-\left(\frac{7}{3}+2\right)x+\frac{7}{3}=0$$

$$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{7}{3}=0$$

따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\dfrac{13}{3}$

이므로

$p+q=3+13=16$

정답 16