정답 및 해설

수학 영역

정답

1	⑤	2	②	3	①	4	②	5	③
6	④	7	②	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	①	13	③	14	⑤	15	①
16	2	17	13	18	16	19	4	20	8
21	180	22	121						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기
$3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2})} = 3^2 = 9$

2. [출제의도] 등비수열 계산하기
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$r = \dfrac{a_3}{a_2} = 2$ 이므로 $a_5 = a_3 \times r^2 = 4$

3. [출제의도] 미분계수 계산하기
$f'(x) = 3x^2 + 2$ 이므로 $f'(1) = 5$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1$
따라서 $\lim\limits_{x \to -1} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 2$

5. [출제의도] 함수의 연속 이해하기
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x \to 2-}(x-1) = \lim\limits_{x \to 2+}(x^2 - ax + 3) = f(2)$
$1 = 7 - 2a$
따라서 $a = 3$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta) = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \dfrac{3}{5}$
따라서 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta) = \dfrac{6}{5}$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기
$a_1 = \dfrac{1}{2}$ 이므로
$a_2 = -2 \times \dfrac{1}{2} + 1 = 0$
$a_3 = -2 \times 0 + 1 = 1$
$a_4 = -2 \times 1 + 1 = -1$
$a_5 = -1 + 1 = 0$
$\vdots$
이때, $a_{n+3} = a_n \ (n \geq 2)$ 이므로
$a_{10} = a_7 = a_4 = -1$
$a_{20} = a_{17} = a_{14} = \cdots = a_2 = 0$
따라서 $a_{10} + a_{20} = -1 + 0 = -1$

8. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 문제 해결하기
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 2$ 이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 3$ 에서 $\lim\limits_{x \to 1}(x-1) = 0$ 이므로
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, $f(1) = 0$
$f(x) = (x-1)(2x+a)$ (a는 상수) 라 하면
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(2x+a)}{x-1} = 2 + a = 3$, $a = 1$
$f(x) = (x-1)(2x+1)$
따라서 $f(3) = 14$

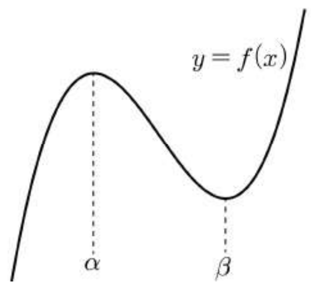
9. [출제의도] 정적분 이해하기
$\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^2 f'(x)dx = 0$
$f(1) - f(0) = f(2) - f(0) = 0$
$f(0) = f(1) = f(2) = k$ (k는 상수)
$f(x) = x(x-1)(x-2) + k = x^3 - 3x^2 + 2x + k$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
따라서 $f'(1) = -1$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 $x_1\ (0 < x_1 < 1)$, x_2, x_3이라 하면
삼각함수 $y = \sin\dfrac{\pi}{2}x$의 주기가 4이므로
$x_2 = 2 - x_1$, $x_3 = x_1 + 4$
$x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4)$
$= x_1 + 6 = \dfrac{25}{4}$
$x_1 = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = 2 - x_1 = \dfrac{7}{4}$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = x_2 - x_1 = \dfrac{3}{2}$

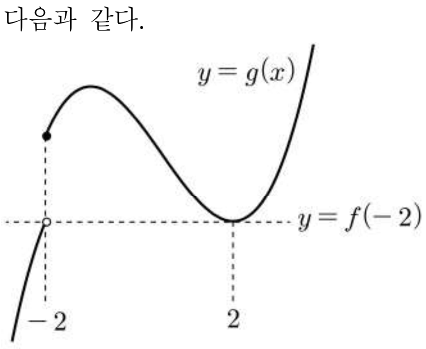
11. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a, \log_2 2a)$, $\mathrm{B}(b, \log_2 4b)$ $(a < b)$라 하자.
직선 AB의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 이므로
$\dfrac{\log_2 4b - \log_2 2a}{b - a} = \dfrac{1}{2}$ 에서
$\log_2 4b - \log_2 2a = \dfrac{1}{2}(b - a)$
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2}$
$= \sqrt{(b-a)^2 + \dfrac{1}{4}(b-a)^2}$
$= \dfrac{\sqrt{5}}{2} \times (b - a) = 2\sqrt{5}$
$b - a = 4$ ⋯ ㉠
$\log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 \dfrac{2b}{a} = 2$, $b = 2a$ ⋯ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a = 4$, $b = 8$
A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)
따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

12. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 추론하기
$n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3S_k}{k+2} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{3S_k}{k+2} = \dfrac{3S_n}{n+2}$
이므로 $3S_n = (n+2) \times a_n \ (n \geq 2)$ 이다.
$S_1 = a_1$ 에서 $3S_1 = 3a_1$ 이므로
$3S_n = (n+2) \times a_n \ (n \geq 1)$
이다.
$3a_n = 3(S_n - S_{n-1})$
$= (n+2) \times a_n - (\boxed{n+1}) \times a_{n-1} \ (n \geq 2)$
$(n-1) \times a_n = (n+1) \times a_{n-1}$ 이고 $a_1 \neq 0$ 이므로
모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$
$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\dfrac{n+1}{n-1}} \ (n \geq 2)$
따라서
$a_{10} = a_1 \times \dfrac{a_2}{a_1} \times \dfrac{a_3}{a_2} \times \dfrac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \dfrac{a_9}{a_8} \times \dfrac{a_{10}}{a_9}$
$= 2 \times \dfrac{3}{1} \times \dfrac{4}{2} \times \dfrac{5}{3} \times \cdots \times \dfrac{10}{8} \times \dfrac{11}{9} = \boxed{110}$
$f(n) = n + 1$, $g(n) = \dfrac{n+1}{n-1}$, $p = 110$
따라서 $\dfrac{f(p)}{g(p)} = \dfrac{111}{\frac{111}{109}} = 109$

13. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기
함수 $f(x)$가 극값을 가지므로
함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 극댓값을 갖고
$x = \beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.



(ⅰ) $\alpha < \beta \leq -2$인 경우
$x \geq -2$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.
$f(-2) < g(-2) < g(2)$
$g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순
(ⅱ) $\alpha < -2 < \beta$인 경우
방정식 $g(x) = f(-2)$의 실근이 열린구간 $(-\infty, \alpha)$에서 존재하므로 모순
(ⅲ) $\alpha = -2$인 경우
방정식 $g(x) = f(-2)$의 실근이 2뿐이므로
함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 극솟값을 갖는다.
$f'(x) = 3(x+2)(x-2)$
$f(x) = x^3 - 12x + \dfrac{1}{2}$
$g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순
(ⅳ) $-2 < \alpha < \beta$인 경우
함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2)=f(-2)$ 이므로 $f(2)+8=f(-2)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$ (a, b는 상수)라 하자.

$8+4a+2b+\frac{1}{2}+8=-8+4a-2b+\frac{1}{2}$

$b=-6$, $f(x)=x^3+ax^2-6x+\frac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax-6$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=12+4a-6=0$, $a=-\frac{3}{2}$

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$ 이므로

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(-1)=4$

14. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\angle \mathrm{BCA}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\cos(\angle \mathrm{CBA})=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{3}{7}$

$\sin(\angle \mathrm{CBA})=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle \mathrm{CBA}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle \mathrm{ADC}=\pi-\theta$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AD}}=k\ (k>0)$이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times 7\times\cos(\pi-\theta)$

$=k^2+49+14k\cos\theta$

$=k^2+6k+49$

$k^2+6k-111=0$ 이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$ (참)

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

$\overline{\mathrm{AD}}=x\ (x>0)$이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$=2x^2+2x^2\times\frac{3}{7}=\frac{20}{7}x^2$

$x^2=56$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\times 6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$x=0$에서 연속이다.

$g(0)=0$ 이므로 $\lim_{x\to 0-}g(x)=f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x-p)$ (p는 상수)라 하면

$f(x+2)=x(x+2-p)$

$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2-p$

함수 $xf(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=0$

$g'(0)=2-p=0$, $p=2$

$f(x)=(x-2)^2$

그러므로

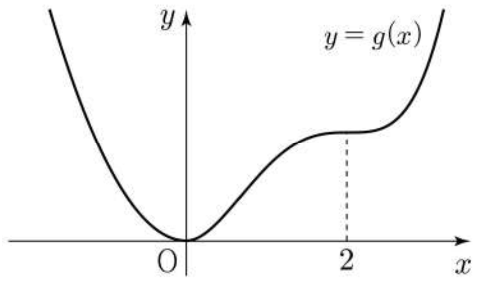
$$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ \int_0^x t(t-2)^2dt & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 2x & (x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x(x-2)^2 & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $g(a)=0$인 경우

$h(x)=g(x)$이므로 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 0

(ii) $0<g(a)<g(2)$ 또는 $g(2)<g(a)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}\neq\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$

$\lim_{x\to\beta-}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}\neq\lim_{x\to\beta+}\frac{h(x)-h(\beta)}{x-\beta}$

함수 $h(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 2

(iii) $g(a)=g(2)$인 경우

방정식 $h(x)=0$의 두 근을 $\gamma\ (\gamma<0)$, 2라 하면

$\lim_{x\to\gamma-}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}\neq\lim_{x\to\gamma+}\frac{h(x)-h(\gamma)}{x-\gamma}$

함수 $h(x)$는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다.

$0<x<2$일 때, $h(x)=g(2)-g(x)$이므로

$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=-g'(2)=0$

$x>2$일 때, $h(x)=g(x)-g(2)$이므로

$\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=g'(2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수는 1

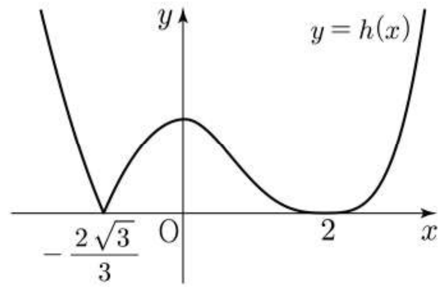
$g(2)=\int_0^2 t(t-2)^2dt=\frac{4}{3}$ 이므로

$g(\gamma)=\gamma^2=\frac{4}{3}$, $\gamma=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 함수 $h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은 $2\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고]

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산하기

$\log_3 7\times\log_7 9=\log_3 7\times\frac{\log_3 9}{\log_3 7}$

$=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x)=\int(6x^2-2x-1)dx$

$=2x^3-x^2-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=2-1-1+C=3$, $C=3$

$f(x)=2x^3-x^2-x+3$

따라서 $f(2)=16-4-2+3=13$

18. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$x(3)=x(0)+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3(3t^2+6t-a)dt$

$=\left[t^3+3t^2-at\right]_0^3=54-3a=6$

따라서 $a=16$

19. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$n=3$일 때 $f(3)=1$

$n=4$일 때 $2n^2-9n<0$이므로 $f(4)=0$

$n=5$일 때 $f(5)=1$

$n=6$일 때 $2n^2-9n>0$이므로 $f(6)=2$

따라서

$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$=2x\int_0^x f(t)dt$

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $h(0)=0$

조건 (나)에 의하여

방정식 $h(x)=0$의 실근은 0과 3이므로

(ⅰ) $h(x)=ax^2(x-3)$ (a는 상수)라 하면
$g'(x)=2ax^3(x-3)$이고 함수 $g(x)$는
$x=0$, $x=3$에서 극값을 가지므로 모순
(ⅱ) $h(x)=ax(x-3)^2$ (a는 상수)라 하면
$g'(x)=2ax^2(x-3)^2$이므로
함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
$h'(x)=f(x)$
$=a(3x^2-12x+9)=3a(x-1)(x-3)$
$f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$
$f(x)=3(x-1)(x-3)$
따라서

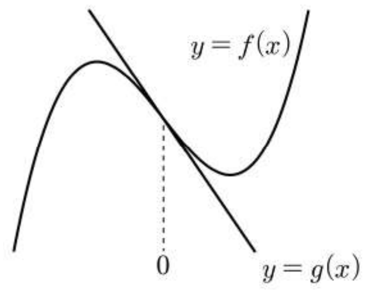
$$\int_0^3 |f(x)|dx$$
$$=3\int_0^3 |(x-1)(x-3)|dx$$
$$=3\int_0^1 (x-1)(x-3)dx-3\int_1^3 (x-1)(x-3)dx$$
$$=3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3$$
$$=3\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-3\left(9-18+9-\frac{1}{3}+2-3\right)=8$$

21. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 문제 해결하기

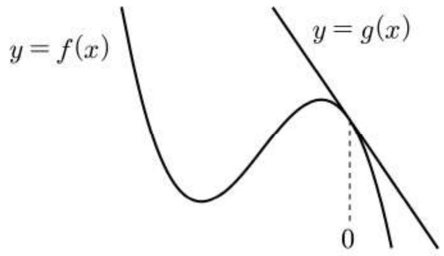
조건 (가)에 의하여
$$a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{2(n-1)}a_k$$
$$=17n-17(n-1)=17\quad(n\geq 2)$$
조건 (나)에 의하여
$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2(2n-1)-1=4n-3\quad(n\geq 1)$
(ⅰ) $n=2$인 경우
$|a_4-a_3|=5$이고 $a_3+a_4=17$
$(a_3,\ a_4)=(6,\ 11)$ 또는 $(a_3,\ a_4)=(11,\ 6)$
조건 (나)에 의하여
$|a_3-a_2|=|a_3-9|=3$이므로
$a_3=6$, $a_4=11$
(ⅱ) $n=3$인 경우
$|a_6-a_5|=9$이고 $a_5+a_6=17$
$(a_5,\ a_6)=(4,\ 13)$ 또는 $(a_5,\ a_6)=(13,\ 4)$
조건 (나)에 의하여
$|a_5-a_4|=|a_5-11|=7$이므로
$a_5=4$, $a_6=13$
(ⅰ), (ⅱ)와 같은 방법을 반복하면
$a_8=15$, $a_{10}=17$, $\cdots$, $a_{20}=27$이므로
$\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.
따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\frac{10\times(18+9\times 2)}{2}=180$

22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

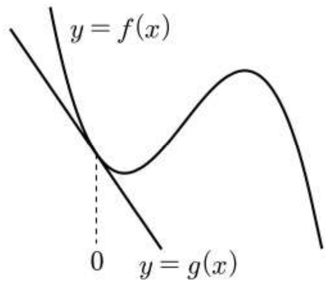
$f(0)=0$이므로
$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(0)=c$, $g(x)=cx$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의
접선의 기울기 c에 대하여
(ⅰ) $c=0$이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $c>0$이면 $h(12)>0$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $c<0$, $a>0$이면 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같으므로
조건 (가)를 만족시키지 않는다.



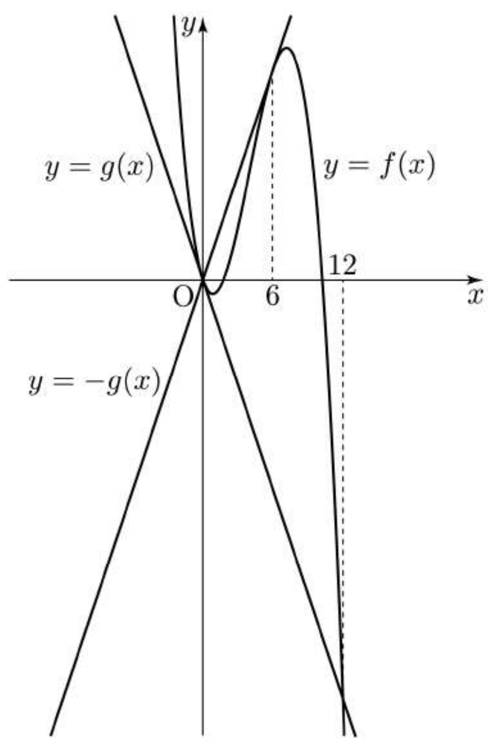
(ⅳ) $c<0$, $a<0$이면
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가
다음과 같은 경우에는 조건 (가)를
만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의
그래프가 다음과 같은 경우에만
조건 (가), (나)를 만족시킨다.

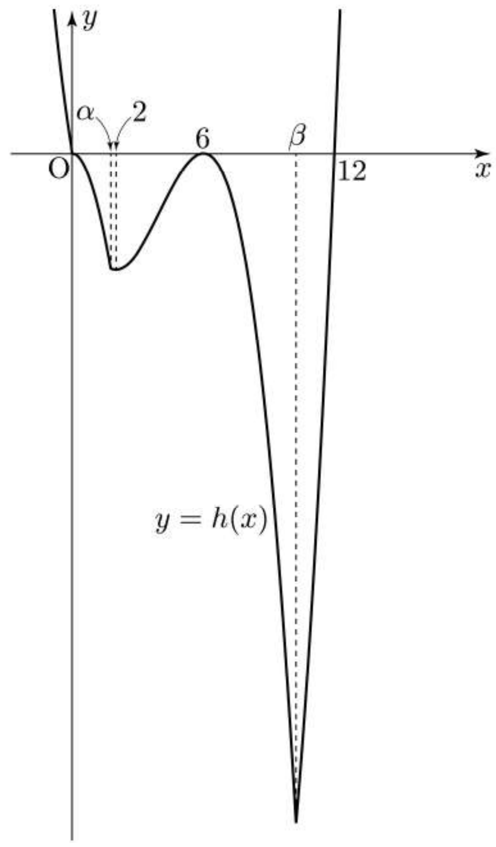


조건 (가)에 의하여
$f(x)+g(x)=ax(x-k)^2 \quad\cdots$ ㉠
조건 (나)에 의하여
$-f(x)+g(x)=-ax^2(x-12) \quad\cdots$ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$2g(x)=2a(6-k)x^2+ak^2x$
$6-k=0$, $k=6$
$g(x)=18ax$
$f(x)=ax(x-6)^2-18ax$
$=ax(x^2-12x+18)$



방정식 $x^2-12x+18=0$의 두 근을
α, β $(\alpha<\beta)$라 하면
$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$
함수 $h(x)$는 다음과 같다.
$$h(x)=\begin{cases} ax(x-6)^2 & (x<0\ \text{또는}\ \alpha\leq x<\beta) \\ -ax^2(x-12) & (0\leq x<\alpha\ \text{또는}\ x\geq\beta)\end{cases}$$
$\alpha<3<\beta$이므로
$h(3)=a\times 3\times(3-6)^2=27a=-\frac{9}{2}$
$a=-\frac{1}{6}$, $c=-3$
$$h(x)=\begin{cases} -\frac{1}{6}x(x-6)^2 & (x<0\ \text{또는}\ \alpha\leq x<\beta) \\ \frac{1}{6}x^2(x-12) & (0\leq x<\alpha\ \text{또는}\ x\geq\beta)\end{cases}$$
$\alpha=6-3\sqrt{2}$, $\beta=6+3\sqrt{2}$이므로
$\alpha<6<\beta<11$
$h(6)=0$, $h(11)=\frac{1}{6}\times 11^2\times(-1)=-\frac{121}{6}$
따라서
$k\times\{h(6)-h(11)\}=6\times\left\{0-\left(-\frac{121}{6}\right)\right\}=121$

[참고]
함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



기하 정답

23	①	24	④	25	⑤	26	④	27	②
28	③	29	15	30	50				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 평행 계산하기

0이 아닌 실수 k에 대하여 $\vec{a}=k\vec{b}$이므로
$(2m-1,\ 3m+1)=(3k,\ 12k)$
$2m-1=3k$ ⋯ ㉠
$3m+1=12k$ ⋯ ㉡
따라서 두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $m=1$

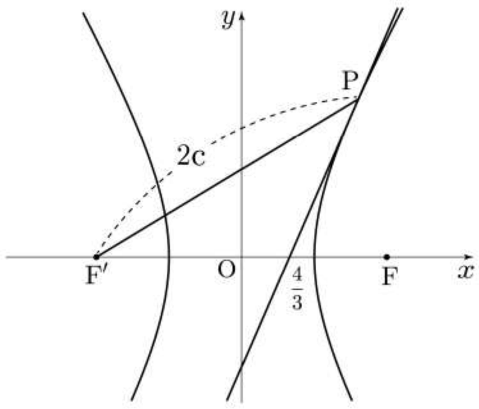
24. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식 이해하기

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9,\ 6)$에서의
접선의 방정식은 $6y=2(x+9)$
준선의 방정식이 $x=-1$이므로 $a=-1$
점 $(-1,\ b)$가 접선 위의 점이므로 $b=\dfrac{8}{3}$
따라서 $a+b=\dfrac{5}{3}$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 원의 방정식 이해하기

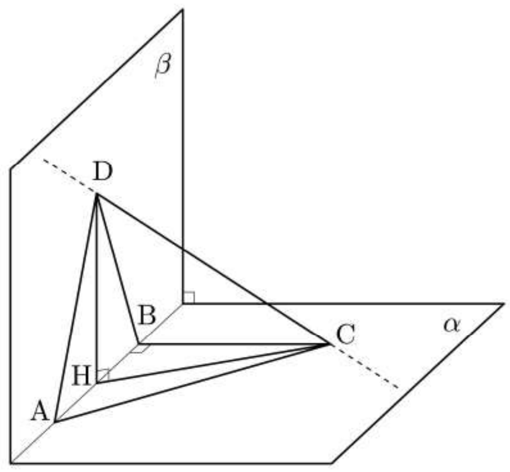
$\overrightarrow{OP}=(x,\ y)$라 하자.
$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x+2,\ y)$
$\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB}=(x-6,\ y-6)$
$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OB})=0$에서
$(x+2,\ y)\cdot(x-6,\ y-6)=0$
$(x+2)(x-6)+y(y-6)=0$
$x^2-4x-12+y^2-6y=0$
$(x-2)^2+(y-3)^2=25$
점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(2,\ 3)$이고
반지름의 길이가 5인 원이다.
따라서 구하는 도형의 길이는 10π

26. [출제의도] 쌍곡선의 성질 이해하기



점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면
점 P에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{4}-\dfrac{y_1y}{k}=1$
이 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표는 $\dfrac{4}{x_1}$
$\dfrac{4}{x_1}=\dfrac{4}{3}$이므로 $x_1=3$
$\overline{PF'}=\overline{FF'}$이므로 $\sqrt{(3+c)^2+y_1^2}=2c$
$y_1^2=3c^2-6c-9$ ⋯ ㉠
점 $P(3,\ y_1)$이 쌍곡선 위의 점이고
$k=c^2-4$이므로 $\dfrac{9}{4}-\dfrac{y_1^2}{c^2-4}=1$
$y_1^2=\dfrac{5}{4}(c^2-4)$ ⋯ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면
$3c^2-6c-9=\dfrac{5}{4}(c^2-4)$
$7c^2-24c-16=0,\ (7c+4)(c-4)=0$
$c>0$이므로 $c=4$
따라서 $k=12$

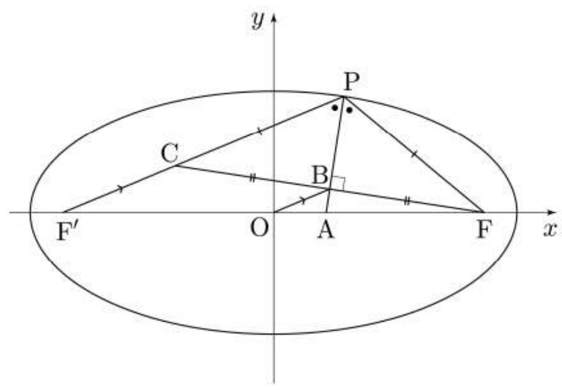
27. [출제의도] 직선과 평면이 이루는 각 이해하기



삼각형 ABC가 직각삼각형이므로
$\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{29})^2-6^2}=4\sqrt{5}$
점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을
H라 하면
삼각형 DAB가 이등변삼각형이므로
$\overline{AH}=\overline{BH}=2\sqrt{5}$, $\overline{DH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{5})^2}=4$
삼각형 HBC가 직각삼각형이므로
$\overline{CH}=\sqrt{6^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{14}$
두 평면 α, β는 서로 수직이므로 $\overline{DH}\perp\overline{BC}$
$\overline{DH}\perp\overline{AB}$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로
직선 DH는 평면 α와 수직이다.
그러므로 $\angle DHC=\dfrac{\pi}{2}$
$\overline{CD}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{14})^2}=6\sqrt{2}$
점 D의 평면 α 위로의 정사영이 점 H이므로
$\cos\theta=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{CD}}$
따라서 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

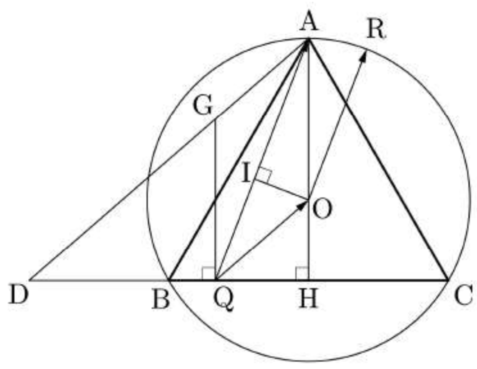
28. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 추론하기

$\overline{AF}=\dfrac{9}{2}$, $\overline{AF'}=\dfrac{15}{2}$이므로
각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{PF}:\overline{PF'}=3:5$
$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=5k\ (k>0)$이라 하자.
타원의 정의에 의하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=8k=2a$
그러므로 $a=4k$



직선 BF와 선분 PF′이 만나는 점을 C라 하면
각 CPF의 이등분선이 선분 CF와 수직으로
만나므로 삼각형 PCF는 이등변삼각형이다.
그러므로 $\overline{BC}=\overline{BF}$
두 삼각형 FBO와 FCF′에서
$\overline{FB}:\overline{FC}=\overline{FO}:\overline{FF'}=1:2$
두 삼각형 FBO, FCF′은 서로 닮음이므로
$\overline{OB}:\overline{F'C}=1:2$
$\overline{F'C}=\overline{PF'}-\overline{PC}=\overline{PF'}-\overline{PF}=5k-3k=2k$
$\overline{F'C}=2\overline{OB}=2\sqrt{3}$
$k=\sqrt{3}$, $a=4\sqrt{3}$
$c^2=a^2-b^2$이므로 $36=48-b^2$
$b^2=12$, $b=2\sqrt{3}$
따라서 $a\times b=24$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적의 성질을 활용하여 문제 해결하기



$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}}{3-1}$이므로 점 D는
선분 CB를 $3:1$로 외분하는 점이다.
선분 DA를 $2:1$로 내분하는 점을 G라 하면
$|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|=3|\overrightarrow{PG}|$이므로 선분 PG의
길이가 최소일 때 $|2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}|$가 최소이다.
그러므로 점 Q는 점 G에서 선분 CD에 내린
수선의 발이다.
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을
H라 하면 $\overline{DH}=6$
$\overline{QH}=\dfrac{1}{3}\overline{DH}=2$, $\overline{AH}=3\sqrt{3}$이므로
$\overline{QA}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{31}$
$\overline{OA}=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
정삼각형은 무게중심과 외심이 같으므로
점 R는 삼각형 ABC의 외접원 위의 점이다.
$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QA}\cdot(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR})$
$\qquad=(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QO})+(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{OR})$
두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QO}$가 이루는 각의 크기를
$\theta_1\ (0\le\theta_1\le\pi)$라 하자.

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO} = |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1$

점 O에서 선분 QA에 내린 수선의 발을 I라 하자.

두 삼각형 AIO, AHQ가 서로 닮음이므로

$\overline{AI} : \overline{AH} = \overline{OA} : \overline{QA}$

$\overline{AI} : 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} : \sqrt{31}$

$\overline{AI} = \frac{18}{\sqrt{31}} = \frac{18\sqrt{31}}{31}$

$\overline{QI} = \overline{QA} - \overline{AI} = \sqrt{31} - \frac{18\sqrt{31}}{31} = \frac{13\sqrt{31}}{31}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO} &= |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QO}|\cos\theta_1 \\ &= |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QI}| \\ &= \sqrt{31} \times \frac{13\sqrt{31}}{31} = 13\end{aligned}$$

두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{OR}$가 이루는 각의 크기를 $\theta_2\ (0 \le \theta_2 \le \pi)$라 하자.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR} &= |\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{OR}|\cos\theta_2 \\ &= \sqrt{31} \times 2\sqrt{3} \times \cos\theta_2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$와 $\overrightarrow{OR}$가 방향이 같을 때 최대이다.

그러므로 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR}$의 최댓값은

$\sqrt{31} \times 2\sqrt{3} \times \cos 0 = 2\sqrt{93}$

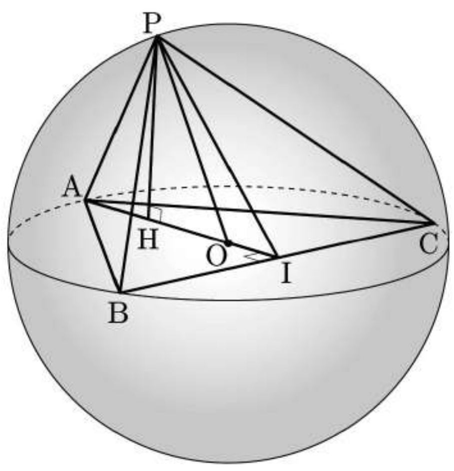
$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR} &= (\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QO}) + (\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OR}) \\ &\le 13 + 2\sqrt{93}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QR}$의 최댓값은 $13 + 2\sqrt{93}$

$p = 13$, $q = 2$

따라서 $p + q = 15$

30. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제 해결하기



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\angle PAO = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{OA} = \overline{OP}$이므로

삼각형 PAO는 정삼각형이다.

$\overline{PA} = 4$, $\overline{PH} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AH} = \overline{OH} = 2$

$\overline{OI} = a\ (a > 0)$이라 하면

직각삼각형 OIB에서

$\overline{IB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OI}^2} = \sqrt{16 - a^2}$

직각삼각형 AIB에서

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\overline{AI}^2 + \overline{IB}^2} \\ &= \sqrt{(a+4)^2 + 16 - a^2} \\ &= \sqrt{8a + 32}\end{aligned}$$

직각삼각형 PHI에서

$$\begin{aligned}\overline{PI} &= \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HI}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (a+2)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 4a + 16}\end{aligned}$$

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HI} \perp \overline{BC}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI} \perp \overline{BC}$이다.

직각삼각형 PIB에서

$$\begin{aligned}\overline{PB} &= \sqrt{\overline{PI}^2 + \overline{IB}^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + 4a + 16) + (16 - a^2)} \\ &= \sqrt{4a + 32}\end{aligned}$$

삼각형 PAB에서

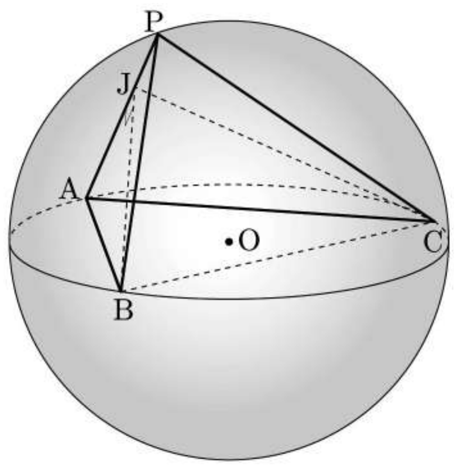
$$\begin{aligned}\cos(\angle PAB) &= \frac{\overline{AP}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}{2 \times \overline{AP} \times \overline{AB}} \\ &= \frac{16 + (8a + 32) - (4a + 32)}{2 \times 4 \times \sqrt{8a + 32}} \\ &= \frac{a + 4}{4\sqrt{2a + 8}}\end{aligned}$$

그러므로 $\frac{\sqrt{10}}{8} = \frac{a + 4}{4\sqrt{2a + 8}}$

$(a + 4)^2 = 5(a + 4)$

$a^2 + 3a - 4 = (a + 4)(a - 1) = 0$

$a > 0$이므로 $a = 1$



점 B에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$\sin(\angle PAB) = \frac{\overline{BJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BJ}}{2\sqrt{10}}$

$\sin(\angle PAB) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$이므로

$\overline{BJ} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$

삼각형 PAB의 넓이를 S'이라 하자.

$S' = \frac{1}{2} \times \overline{PA} \times \overline{BJ} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$

$\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{PB} = \overline{PC}$이므로

두 삼각형 PAB, PAC는 서로 합동이다.

$\overline{BJ} \perp \overline{AP}$이므로 $\overline{CJ} \perp \overline{AP}$이고 $\overline{BJ} = \overline{CJ}$

두 평면 PAB와 PAC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\overline{BJ} \perp \overline{AP}$, $\overline{CJ} \perp \overline{AP}$이므로

$\theta = \angle BJC$

$\overline{JB} = \overline{JC} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{15}$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overline{JB}^2 + \overline{JC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{JB} \times \overline{JC}} \\ &= \frac{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2 - 60}{2 \times \left(\frac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$S = S' \times \cos\theta = 3\sqrt{15} \times \frac{1}{9} = \frac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 $30 \times S^2 = 30 \times \frac{15}{9} = 50$