

수학 영역

정답

1	⑤	2	②	3	①	4	②	5	③
6	④	7	②	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	①	13	③	14	⑤	15	①
16	2	17	13	18	16	19	4	20	8
21	180	22	121						

해설

- [출제의도]** 지수 계산하기
 $3^{2\sqrt{2}} \times 9^{1-\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2} + (2-2\sqrt{2})} = 3^2 = 9$
- [출제의도]** 등비수열 계산하기
 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면
 $r = \frac{a_3}{a_2} = 2$ 이므로 $a_5 = a_3 \times r^2 = 4$
- [출제의도]** 미분계수 계산하기
 $f'(x) = 3x^2 + 2$ 이므로 $f'(1) = 5$
- [출제의도]** 함수의 극한 이해하기
 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$
- [출제의도]** 함수의 연속 이해하기
 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2-} (x-1) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - ax + 3) = f(2)$
 $1 = 7 - 2a$
 따라서 $a = 3$
- [출제의도]** 삼각함수의 성질 이해하기
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta) = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \frac{3}{5}$
 따라서 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta) = \frac{6}{5}$
- [출제의도]** 수열의 귀납적 정의 이해하기
 $a_1 = \frac{1}{2}$ 이므로
 $a_2 = -2 \times \frac{1}{2} + 1 = 0$
 $a_3 = -2 \times 0 + 1 = 1$
 $a_4 = -2 \times 1 + 1 = -1$
 $a_5 = -1 + 1 = 0$
 \vdots
 이때, $a_{n+3} = a_n$ ($n \geq 2$) 이므로
 $a_{10} = a_7 = a_4 = -1$
 $a_{20} = a_{17} = a_{14} = \dots = a_2 = 0$
 따라서 $a_{10} + a_{20} = -1 + 0 = -1$

- [출제의도]** 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 문제 해결하기
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ 이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, f(1) = 0$
 $f(x) = (x-1)(2x+a)$ (a 는 상수)라 하면
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+a)}{x-1} = 2+a = 3, a = 1$
 $f(x) = (x-1)(2x+1)$
 따라서 $f(3) = 14$

- [출제의도]** 정적분 이해하기
 $\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^2 f'(x)dx = 0$
 $f(1) - f(0) = f(2) - f(0) = 0$
 $f(0) = f(1) = f(2) = k$ (k 는 상수)
 $f(x) = x(x-1)(x-2) + k = x^3 - 3x^2 + 2x + k$
 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
 따라서 $f'(1) = -1$

- [출제의도]** 삼각함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 x_1 ($0 < x_1 < 1$), x_2, x_3 이라 하면
 삼각함수 $y = \sin\frac{\pi}{2}x$ 의 주기가 4이므로
 $x_2 = 2 - x_1, x_3 = x_1 + 4$
 $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (2 - x_1) + (x_1 + 4)$
 $= x_1 + 6 = \frac{25}{4}$
 $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 2 - x_1 = \frac{7}{4}$
 따라서 $\overline{AB} = x_2 - x_1 = \frac{3}{2}$

- [출제의도]** 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기
 두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, \log_2 2a), B(b, \log_2 4b)$ ($a < b$)라 하자.
 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $\frac{\log_2 4b - \log_2 2a}{b-a} = \frac{1}{2}$ 에서
 $\log_2 4b - \log_2 2a = \frac{1}{2}(b-a)$
 $\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2}$
 $= \sqrt{(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2}$
 $= \frac{\sqrt{5}}{2} \times (b-a) = 2\sqrt{5}$
 $b-a = 4 \dots \textcircled{1}$
 $\log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 \frac{2b}{a} = 2, b = 2a \dots \textcircled{2}$
 두 식 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하면 $a = 4, b = 8$
 $A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)$
 따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

- [출제의도]** 수열의 합을 활용하여 추론하기
 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= \sum_{k=1}^n \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2}$
 이므로 $3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 2$)이다.
 $S_1 = a_1$ 에서 $3S_1 = 3a_1$ 이므로
 $3S_n = (n+2) \times a_n$ ($n \geq 1$)이다.
 $3a_n = 3(S_n - S_{n-1})$
 $= (n+2) \times a_n - (n+1) \times a_{n-1}$ ($n \geq 2$)
 $(n-1) \times a_n = (n+1) \times a_{n-1}$ 이고 $a_1 \neq 0$ 이므로
 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \neq 0$
 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$ ($n \geq 2$)
 따라서

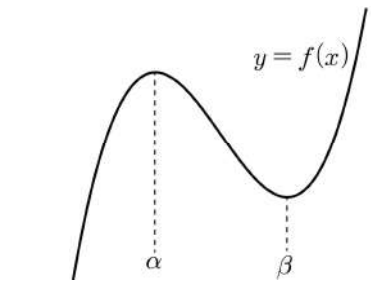
$$a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9}$$

$$= 2 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \dots \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{9} = \boxed{110}$$

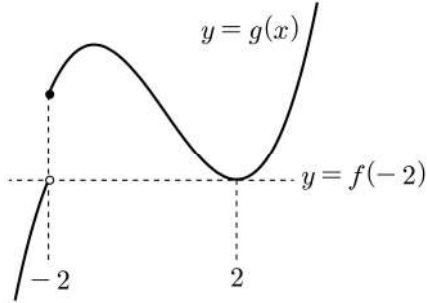
$$f(n) = n+1, g(n) = \frac{n+1}{n-1}, p = 110$$

$$\text{따라서 } \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{111}{\frac{111}{109}} = 109$$

- [출제의도]** 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기
 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지므로
 함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 갖고
 $x = \beta$ 에서 극솟값을 갖는다고 하자.



- $\alpha < \beta \leq -2$ 인 경우
 $x \geq -2$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가한다.
 $f(-2) < g(-2) < g(2)$
 $g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순
- $\alpha < -2 < \beta$ 인 경우
 방정식 $g(x) = f(-2)$ 의 실근이 열린구간 $(-\infty, \alpha)$ 에서 존재하므로 모순
- $\alpha = -2$ 인 경우
 방정식 $g(x) = f(-2)$ 의 실근이 2뿐이므로
 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 갖는다.
 $f'(x) = 3(x+2)(x-2)$
 $f(x) = x^3 - 12x + \frac{1}{2}$
 $g(2) \neq f(-2)$ 이므로 모순
- $-2 < \alpha < \beta$ 인 경우
 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(2) = f(-2)$ 이므로 $f(2) + 8 = f(-2)$
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + \frac{1}{2}$ (a, b 는 상수) 라 하자.
 $8 + 4a + 2b + \frac{1}{2} + 8 = -8 + 4a - 2b + \frac{1}{2}$
 $b = -6, f(x) = x^3 + ax^2 - 6x + \frac{1}{2}$
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 6$
 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로
 $f'(2) = 12 + 4a - 6 = 0, a = -\frac{3}{2}$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{2}$ 이므로
 $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$
 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을 갖는다.
 따라서 극댓값은 $f(-1) = 4$

14. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$ 이므로
 $\cos(\angle CBA) = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{7}$
 $\sin(\angle CBA) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)
 ㄴ. $\angle CBA = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 라 하면
 $\angle ADC = \pi - \theta$
 $\overline{AC} = \overline{AB} \times \sin\theta = 14 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} = 4\sqrt{10}$
 $\overline{AD} = k$ ($k > 0$) 이라 하면
 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여
 $(4\sqrt{10})^2 = k^2 + 7^2 - 2 \times k \times 7 \times \cos(\pi - \theta)$
 $= k^2 + 49 + 14k \cos\theta$
 $= k^2 + 6k + 49$
 $k^2 + 6k - 11 = 0$ 이므로
 $\overline{AD} = -3 + \sqrt{9 + 111} = -3 + 2\sqrt{30}$ (참)
 ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다.
 그러므로 $\overline{AD} = \overline{CD}$
 $\overline{AD} = x$ ($x > 0$) 이라 하면
 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여
 $(4\sqrt{10})^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos(\pi - \theta)$
 $= 2x^2 + 2x^2 \times \frac{3}{7} = \frac{20}{7}x^2$
 $x^2 = 56$ 이므로 $\overline{AD} = 2\sqrt{14}$
 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은
 $\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC}$
 $= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{14})^2 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 6$
 $= 8\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 20\sqrt{10}$ (참)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하므로 $x = 0$ 에서 연속이다.
 $g(0) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = f(2) = 0$
 $f(x) = (x-2)(x-p)$ (p 는 상수) 라 하면

$f(x+2) = x(x+2-p)$
 $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = 2-p$
 함수 $xf(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면
 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0) = 0$
 $g'(0) = 2-p = 0, p = 2$
 $f(x) = (x-2)^2$
 그러므로

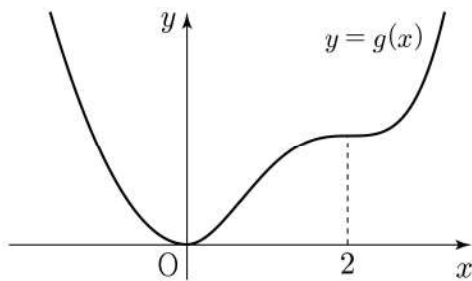
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ \int_0^x t(t-2)^2 dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x(x-2)^2 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

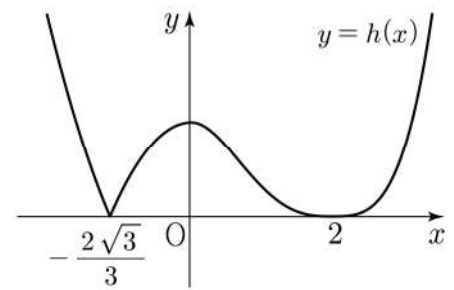
함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



- (i) $g(a) = 0$ 인 경우
 $h(x) = g(x)$ 이므로 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 0
- (ii) $0 < g(a) < g(2)$ 또는 $g(2) < g(a)$ 인 경우
 방정식 $h(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} \neq \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha}$
 $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{h(x) - h(\beta)}{x - \beta} \neq \lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{h(x) - h(\beta)}{x - \beta}$
 함수 $h(x)$ 는 $x = \alpha, x = \beta$ 에서 미분가능하지 않다.
 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 2
- (iii) $g(a) = g(2)$ 인 경우
 방정식 $h(x) = 0$ 의 두 근을 γ ($\gamma < 0$), 2라 하면
 $\lim_{x \rightarrow \gamma^-} \frac{h(x) - h(\gamma)}{x - \gamma} \neq \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{h(x) - h(\gamma)}{x - \gamma}$
 함수 $h(x)$ 는 $x = \gamma$ 에서 미분가능하지 않다.
 $0 < x < 2$ 일 때, $h(x) = g(2) - g(x)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = -g'(2) = 0$
 $x > 2$ 일 때, $h(x) = g(x) - g(2)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = g'(2) = 0$
 함수 $h(x)$ 는 $x = 2$ 에서 미분가능하다.
 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수는 1

$g(2) = \int_0^2 t(t-2)^2 dt = \frac{4}{3}$ 이므로
 $g(\gamma) = \gamma^2 = \frac{4}{3}, \gamma = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 따라서 함수 $h(x)$ 가 $x = k$ 에서 미분가능하지 않은 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 모든 a 의 값의 곱은 $2 \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[참고]
 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



16. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산하기

$$\log_3 7 \times \log_7 9 = \log_3 7 \times \frac{\log_3 9}{\log_3 7}$$

$$= \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2$$

17. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f(x) = \int (6x^2 - 2x - 1) dx$
 $= 2x^3 - x^2 - x + C$ (단, C 는 적분상수)
 $f(1) = 2 - 1 - 1 + C = 3, C = 3$
 $f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 3$
 따라서 $f(2) = 16 - 4 - 2 + 3 = 13$

18. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면
 시각 $t = 3$ 에서의 점 P의 위치는
 $x(3) = x(0) + \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (3t^2 + 6t - a) dt$
 $= [t^3 + 3t^2 - at]_0^3 = 54 - 3a = 6$
 따라서 $a = 16$

19. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$n = 3$ 일 때 $f(3) = 1$
 $n = 4$ 일 때 $2n^2 - 9n < 0$ 이므로 $f(4) = 0$
 $n = 5$ 일 때 $f(5) = 1$
 $n = 6$ 일 때 $2n^2 - 9n > 0$ 이므로 $f(6) = 2$
 따라서
 $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$$g'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x)$$

$$= 2x \int_0^x f(t) dt$$

$h(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 하면 $h(0) = 0$

조건 (나)에 의하여
 방정식 $h(x) = 0$ 의 실근은 0과 3이므로

(i) $h(x) = ax^2(x-3)$ (a 는 상수) 라 하면
 $g'(x) = 2ax^3(x-3)$ 이고 함수 $g(x)$ 는
 $x=0, x=3$ 에서 극값을 가지므로 모순
 (ii) $h(x) = ax(x-3)^2$ (a 는 상수) 라 하면
 $g'(x) = 2ax^2(x-3)^2$ 이므로
 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
 $h'(x) = f(x)$
 $= a(3x^2 - 12x + 9) = 3a(x-1)(x-3)$
 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=1$
 $f(x) = 3(x-1)(x-3)$

따라서

$$\int_0^3 |f(x)| dx$$

$$= 3 \int_0^1 |(x-1)(x-3)| dx$$

$$= 3 \int_0^1 (x-1)(x-3) dx - 3 \int_1^3 (x-1)(x-3) dx$$

$$= 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 - 3 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_1^3$$

$$= 3 \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 3 \left(9 - 18 + 9 - \frac{1}{3} + 2 - 3 \right) = 8$$

21. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여

$$a_{2n-1} + a_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{2(n-1)} a_k$$

$$= 17n - 17(n-1) = 17 \quad (n \geq 2)$$

조건 (나)에 의하여

$$|a_{2n} - a_{2n-1}| = 2(2n-1) - 1 = 4n - 3 \quad (n \geq 1)$$

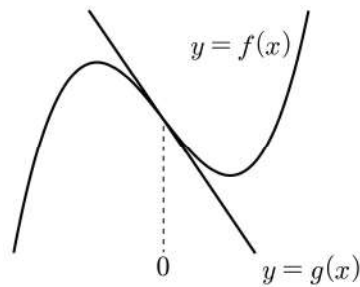
(i) $n=2$ 인 경우
 $|a_4 - a_3| = 5$ 이고 $a_3 + a_4 = 17$
 $(a_3, a_4) = (6, 11)$ 또는 $(a_3, a_4) = (11, 6)$
 조건 (나)에 의하여
 $|a_3 - a_2| = |a_3 - 9| = 3$ 이므로
 $a_3 = 6, a_4 = 11$
 (ii) $n=3$ 인 경우
 $|a_6 - a_5| = 9$ 이고 $a_5 + a_6 = 17$
 $(a_5, a_6) = (4, 13)$ 또는 $(a_5, a_6) = (13, 4)$
 조건 (나)에 의하여
 $|a_5 - a_4| = |a_5 - 11| = 7$ 이므로
 $a_5 = 4, a_6 = 13$

(i), (ii)와 같은 방법을 반복하면
 $a_8 = 15, a_{10} = 17, \dots, a_{20} = 27$ 이므로
 $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$ 의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인
 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.
 따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \frac{10 \times (18 + 9 \times 2)}{2} = 180$

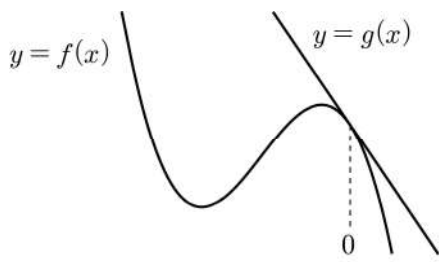
22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

$f(0) = 0$ 이므로
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (a, b, c 는 상수) 라 하면
 $f'(0) = c, g(x) = cx$
 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기 c 에 대하여
 (i) $c = 0$ 이면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
 (ii) $c > 0$ 이면 $h(12) > 0$ 이므로
 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

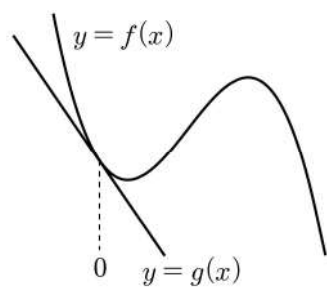
(iii) $c < 0, a > 0$ 이면 두 함수 $y = f(x)$ 와
 $y = g(x)$ 의 그래프가 다음과 같으므로
 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



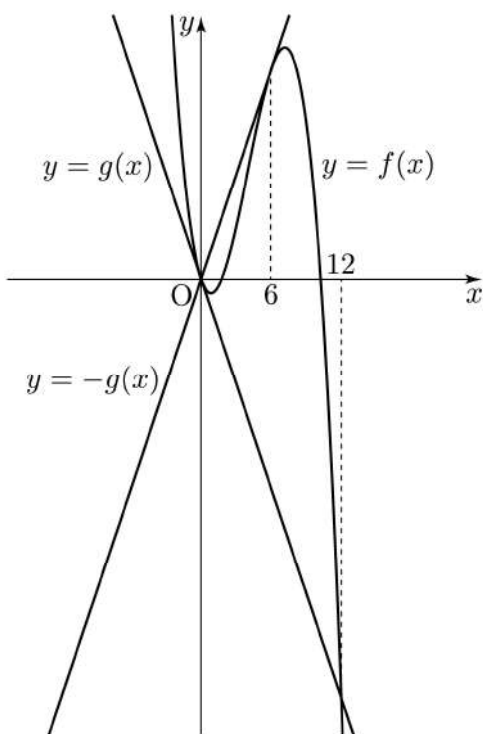
(iv) $c < 0, a < 0$ 이면
 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가
 다음과 같은 경우에는 조건 (가)를
 만족시키지 않는다.



그러므로 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
 그래프가 다음과 같은 경우에만
 조건 (가), (나)를 만족시킨다.



조건 (가)에 의하여
 $f(x) + g(x) = ax(x-k)^2 \dots \textcircled{A}$
 조건 (나)에 의하여
 $-f(x) + g(x) = -ax^2(x-12) \dots \textcircled{B}$
 두 식 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하면
 $2g(x) = 2a(6-k)x^2 + ak^2x$
 $6-k=0, k=6$
 $g(x) = 18ax$
 $f(x) = ax(x-6)^2 - 18ax$
 $= ax(x^2 - 12x + 18)$



방정식 $x^2 - 12x + 18 = 0$ 의 두 근을
 α, β ($\alpha < \beta$) 라 하면
 $\alpha = 6 - 3\sqrt{2}, \beta = 6 + 3\sqrt{2}$
 함수 $h(x)$ 는 다음과 같다.

$$h(x) = \begin{cases} ax(x-6)^2 & (x < 0 \text{ 또는 } \alpha \leq x < \beta) \\ -ax^2(x-12) & (0 \leq x < \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

$\alpha < 3 < \beta$ 이므로
 $h(3) = a \times 3 \times (3-6)^2 = 27a = -\frac{9}{2}$

$$a = -\frac{1}{6}, c = -3$$

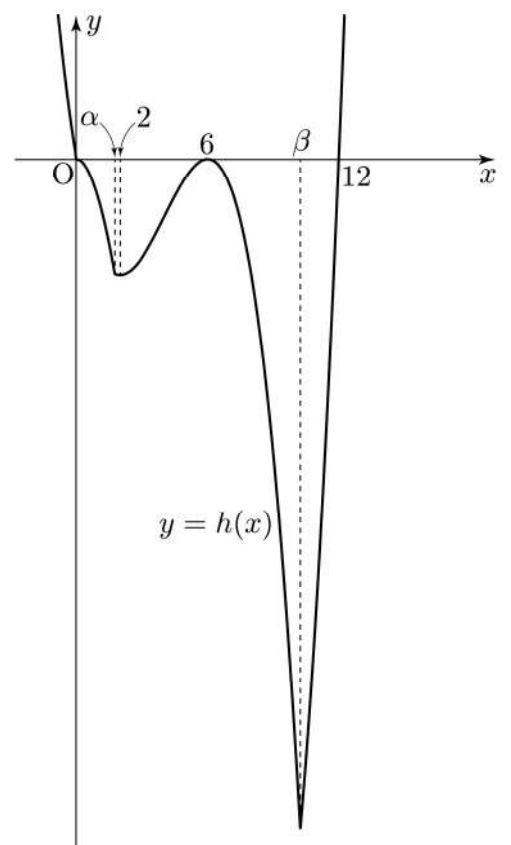
$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x(x-6)^2 & (x < 0 \text{ 또는 } \alpha \leq x < \beta) \\ \frac{1}{6}x^2(x-12) & (0 \leq x < \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta) \end{cases}$$

$\alpha = 6 - 3\sqrt{2}, \beta = 6 + 3\sqrt{2}$ 이므로
 $\alpha < 6 < \beta < 11$
 $h(6) = 0, h(11) = \frac{1}{6} \times 11^2 \times (-1) = -\frac{121}{6}$

따라서
 $k \times \{h(6) - h(11)\} = 6 \times \left\{ 0 - \left(-\frac{121}{6} \right) \right\} = 121$

[참고]

함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



미적분 정답

23	④	24	③	25	③	26	②	27	②
28	①	29	4	30	129				

미적분 해설

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} - n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} - n^2)(\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} + n^2)}{\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} + n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 5}{\sqrt{n^4 + 5n^2 + 5} + n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{5}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{5}{n^4}} + 1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

24. [출제의도] 치환적분법 이해하기

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x \, dx - \int_1^e \frac{2}{x^2} \ln x \, dx \\ &= \int_1^e \frac{3}{x} \ln x \, dx \\ & \ln x = t \text{ 라 하면 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \\ & x = 1 \text{ 일 때 } t = 0, \quad x = e \text{ 일 때 } t = 1 \\ & \text{따라서 } \int_1^e \frac{3}{x} \ln x \, dx = 3 \int_0^1 t \, dt \\ &= 3 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

25. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

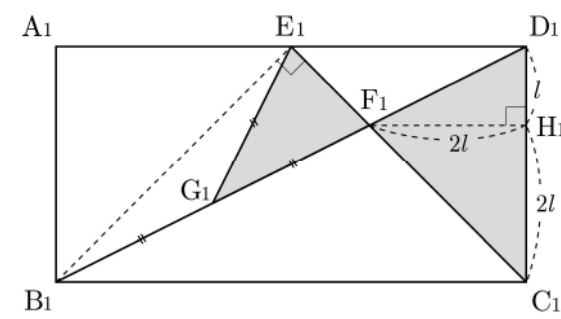
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2t \ln t + t + 3 \\ \frac{dy}{dt} &= 6e^{t-1} + 6te^{t-1} = 6e^{t-1}(1+t) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6e^{t-1}(1+t)}{2t \ln t + t + 3} \quad (2t \ln t + t + 3 \neq 0) \end{aligned}$$

따라서 $t = 1$ 일 때, $\frac{dy}{dx} = \frac{6 \times 2}{1 + 3} = \frac{12}{4} = 3$

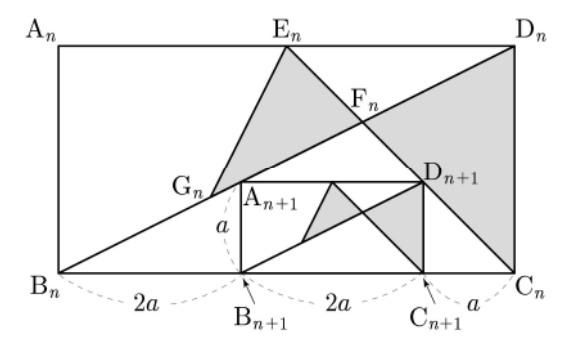
26. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = \frac{1}{3} \text{ 에서 } f(2) = 2, \quad f'(2) = \frac{1}{3} \\ & f(x) \text{ 는 함수 } g(x) \text{ 의 역함수이므로 } g(2) = 2 \\ & g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(2)} = 3 \\ & f(2) \neq 0 \text{ 이고 두 함수 } f(x), g(x) \text{ 는 } \\ & \text{양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로} \\ & \text{함수 } h(x) \text{ 는 } x = 2 \text{ 에서 미분가능하다.} \\ & h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2} \\ & h'(2) = \frac{g'(2)f(2) - g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2} \\ &= \frac{3 \times 2 - 2 \times \frac{1}{3}}{2^2} = \frac{6 - \frac{2}{3}}{4} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

27. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



점 F_1 에서 선분 C_1D_1 에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하자.
 $\overline{D_1H_1} = l (l > 0)$ 이라 하면 $\overline{F_1H_1} = \overline{C_1H_1} = 2l$
 $\overline{C_1D_1} = 3l = 1$
 $l = \frac{1}{3}$ 이므로 $\overline{D_1H_1} = \frac{1}{3}, \overline{F_1H_1} = \frac{2}{3}$
삼각형 $C_1D_1F_1$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
 $\angle B_1E_1F_1 = \frac{\pi}{2}$ 이고, $\overline{G_1E_1} = \overline{G_1F_1}$ 이므로
점 G_1 은 삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 외접원의 중심이다.
 $\overline{B_1G_1} = \overline{G_1F_1}$ 이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는
삼각형 $B_1F_1E_1$ 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이다.
 $\overline{B_1E_1} = \sqrt{2}, \overline{E_1F_1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로
삼각형 $G_1F_1E_1$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{B_1E_1} \times \overline{E_1F_1} \right) = \frac{1}{4} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{6}$
 $S_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

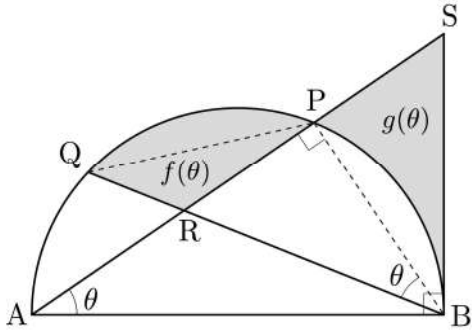


두 삼각형 $C_nD_nF_n, G_nF_nE_n$ 으로 만들어진
 \triangle 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.
 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = a (a > 0)$ 이라 하면
 $\overline{B_nB_{n+1}} = 2a, \overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2a, \overline{C_{n+1}C_n} = a$
 $\overline{B_nC_n} = 5a$
 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \frac{2}{5} \overline{B_nC_n}$
두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n,$
 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 닮음비는 $1 : \frac{2}{5}$ 이므로
넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^2$ 이다.
 $T_{n+1} = \frac{4}{25} T_n$
수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \frac{1}{2}$ 이고
공비가 $\frac{4}{25}$ 인 등비수열이다.
따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{25}{42}$

28. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^5 f(x)(x + \cos 2\pi x) \, dx \\ &= \int_{-1}^5 x f(x) \, dx + \int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x \, dx \quad \text{㉠} \\ & \text{조건 (가)에 의하여} \\ & \int_{-1}^1 x f(x) \, dx = 0, \quad \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \, dx \\ & \int_{-1}^5 x f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + \int_1^3 x f(x) \, dx + \int_3^5 x f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + \int_{-1}^1 (x+2) f(x+2) \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 (x+4) f(x+4) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + \int_{-1}^1 (x+2) f(x) \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 (x+4) f(x) \, dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 x f(x) \, dx + 6 \int_{-1}^1 f(x) \, dx \\ &= 12 \int_0^1 f(x) \, dx = 24 \quad \text{㉡} \\ & \text{조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 } x \text{ 에 대하여} \\ & f(-x) \cos 2\pi(-x) = f(x) \cos 2\pi x \\ & f(x+2) \cos 2\pi(x+2) = f(x) \cos 2\pi x \\ & \int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx + \int_1^3 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ & \quad + \int_3^5 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 f(x+2) \cos 2\pi(x+2) \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 f(x+4) \cos 2\pi(x+4) \, dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx + \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ & \quad + \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= 6 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ & \text{㉠, ㉡에 의하여} \\ & \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx = \frac{1}{6} \left(\frac{47}{2} - 24 \right) = -\frac{1}{12} \\ & \text{따라서} \\ & \int_0^1 f'(x) \sin 2\pi x \, dx \\ &= \left[f(x) \sin 2\pi x \right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= -2\pi \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x \, dx \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

29. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여
문제 해결하기

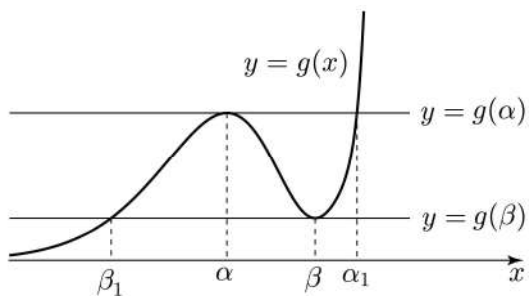


호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로
원주각의 성질에 의하여
 $\angle PAB = \angle QBP = \theta$
 $\angle ABS = \angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이고
 $\angle PBA = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 $\angle SBP = \theta$
두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로
두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.
선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와
선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가
서로 같다.
그러므로 $f(\theta) + g(\theta)$ 는 삼각형 QBP의 넓이와
같다.

$$\begin{aligned} \overline{PB} &= \overline{PQ} = 2\sin\theta \\ f(\theta) + g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PB} \times \overline{PQ} \times \sin(\pi - 2\theta) \\ &= \frac{1}{2} \times (2\sin\theta)^2 \times \sin 2\theta \\ &= 2\sin^2\theta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2\sin^2\theta \sin 2\theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(2 \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \times \frac{\sin 2\theta}{\theta} \right) \\ &= 2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2 \right) \\ &= 2 \times 1^2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

30. [출제의도] 미분법을 활용하여 추론하기
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $g'(x) = e^x \{f(x) + f'(x)\}$
 $= e^x \{ax^2 + (2a+b)x + b+c\}$
함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를
만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 극값을
갖는다.



함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값, $x = \beta$ 에서
극솟값을 갖는다고 하면
 $g'(x) = e^x \{a(x - \alpha)(x - \beta)\}$

함수 $h(k)$ 는 $k = t$ ($t \neq g(\alpha), t \neq g(\beta)$)에서

$$\lim_{k \rightarrow t^-} h(k) = \lim_{k \rightarrow t^+} h(k) = h(t)$$

그러므로 함수 $h(k)$ 는

$k = t$ ($t \neq g(\alpha), t \neq g(\beta)$)에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$ 가 $k = t$ 에서
불연속인 t 의 개수가 1이므로

함수 $h(k)$ 는

$k = g(\alpha)$ 에서 연속이고 $k = g(\beta)$ 에서 불연속
또는

$k = g(\alpha)$ 에서 불연속이고 $k = g(\beta)$ 에서 연속
이다.

(i) 함수 $h(k)$ 가 $k = g(\alpha)$ 에서 연속이고
 $k = g(\beta)$ 에서 불연속인 경우

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^-} h(k) = 2\alpha + \alpha_1$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^+} h(k) = \alpha_1$$

$$h(g(\alpha)) = \alpha + \alpha_1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^-} h(k) = \lim_{k \rightarrow g(\alpha)^+} h(k) = h(g(\alpha)) \text{에서}$$

$$2\alpha + \alpha_1 = \alpha_1 = \alpha + \alpha_1$$

그러므로 $\alpha = 0$

함수 $h(k)$ 는 $k = g(\beta)$ 에서 불연속이므로

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) - \lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = 2\beta \neq 0$$

조건 (나)에 의하여 $\beta = 1, g(\beta) = 3e$

$$g'(0) = 0, g'(1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = e^x \{ax(x-1)\}$$

$$g(x) = e^x \{a(x^2 - 3x + 3)\}$$

$$g(1) = 3e \text{ 이므로 } a = 3$$

최고차항의 계수가 3이므로 주어진 조건을
만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $h(k)$ 가 $k = g(\alpha)$ 에서 불연속이고
 $k = g(\beta)$ 에서 연속인 경우

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = \beta_1$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) = 2\beta + \beta_1$$

$$h(g(\beta)) = \beta + \beta_1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = \lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) = h(g(\beta)) \text{에서}$$

$$\beta_1 = 2\beta + \beta_1 = \beta + \beta_1$$

그러므로 $\beta = 0$

함수 $h(k)$ 는 $k = g(\alpha)$ 에서 불연속이므로

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^+} h(k) - \lim_{k \rightarrow g(\alpha)^-} h(k) = -2\alpha \neq 0$$

조건 (나)에 의하여 $\alpha = -1, g(\alpha) = 3e$

$$g'(0) = 0, g'(-1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = e^x \{ax(x+1)\}$$

$$g(x) = e^x \{a(x^2 - x + 1)\}$$

$$g(-1) = 3e \text{ 이므로 } a = e^2$$

$$g(x) = e^{x+2} \{x^2 - x + 1\}$$

$$\text{따라서 } g(-6) \times g(2) = 43e^{-4} \times 3e^4 = 129$$