2022학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.①	02.⑤	03.⑤	04.④	05.③
06.①	07.④	08.②	09.③	10.③
11.④	12.②	13.②	14.⑤	15.①
16. 2	17. 8	18. 9	19. 11	
20. 21	21. 192	22. 108		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\times 3^{-\frac{7}{4}}$

$=3^{-\frac{1}{4}}\times 3^{-\frac{7}{4}}$

$=3^{-\frac{1}{4}+\left(-\frac{7}{4}\right)}$

$=3^{-2}=\frac{1}{9}$

정답 ①

2. **출제의도** : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+4x+5$에서

$f'(x)=6x^2+4$

이므로

$f'(1)=6+4=10$

정답 ⑤

3. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2a_4=36$

에서 $a_1=2$이므로

$2r\times 2r^3=36$

즉, $r^4=9$

따라서

$\frac{a_7}{a_3}=\frac{a_1r^6}{a_1r^2}=r^4=9$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$

이 성립해야 한다. 이때,

$\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1-}(2x+a)=-2+a$

$\lim_{x\to -1+}f(x)=\lim_{x\to -1+}(x^2-5x-a)=6-a$

$f(-1)=-2+a$

이므로

$-2+a=6-a$

따라서 $a=4$

정답 ④

5. **출제의도** : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$\quad=6(x+2)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$이 되는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값

$M=f(-2)=-16+12+24+1=21$

을 갖고, $x=1$에서 극솟값

$m=f(1)=2+3-12+1=-6$

을 갖는다.

따라서 $M+m=15$

정답 ③

6. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$$

에서

$$\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=4$$

$$\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=4$$

$$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$$

$$1-\cos^2\theta=2\cos^2\theta$$

따라서

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ①

7. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

이때, $\frac{1}{a_{n+1}}=-\frac{1}{n}-\frac{1}{4}$이므로 $n=12$를

대입하면

$$\frac{1}{a_{13}}=-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}$$

즉, $a_{13}=-3$

정답 ④

8. **출제의도** : 함수의 극한값을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to 0$이면

(분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$

같은 방법으로 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서

$f(1)=0$

따라서 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)=-b$$

이므로

$b=-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x(ax+b)=a+b$$

이므로

$a+b=1$

따라서 $a=2$이므로

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

따라서 $f(2)=2\times1\times3=6$

정답 ②

[다른 풀이]

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to0$이면

(분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $f(0)=0$

이때

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=1$

같은 방법으로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서

$f(1)=0,\ f'(1)=1$

함수 $f(x)$는 삼차함수이고

$f'(0)=f'(1)=1$이므로

$f'(x)=ax(x-1)+1$, 즉

$f'(x)=ax^2-ax+1$

이라 놓으면

$f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=0$에서 $C=0$

$f(1)=0$에서 $\frac{a}{3}-\frac{a}{2}+1=0$

$a=6$이므로 $f(x)=2x^3-3x^2+x$

$\therefore\ f(2)=6$

9. 출제의도 : 도함수를 활용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=-4t^3+12t^2$

이므로

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12$

$k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$k=1$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$이므로 $3\le t\le4$일 때 $v(t)\le0$이다.

따라서 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_3^4|v(t)|dt&=\int_3^4\left|-4t^3+12t^2\right|dt\\&=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt\\&=\left[t^4-4t^3\right]_3^4\\&=0-(-27)=27\end{aligned}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 삼각함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$

이므로 두 점 A,B의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2b},a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{2b},a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b\cdots$ ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}$

$=2ab\times\frac{2ab}{5}$

$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$, $ab=\frac{5}{4}\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로

$a+b=3$

정답 ③

11. **출제의도** : 정적분과 미분과의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2+a+3a+0$

이므로

$f(1)=2+4a$ ⋯ ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=3a+\int_1^0 f(t)\,dt$

즉,

$0=3a-\int_0^1 f(t)\,dt$

이므로

$\int_0^1 f(t)dt=3a$ ⋯ ㉢

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이므로 ㉡, ㉢에서

$2+4a=3a$

즉, $a=-2$, $f(1)=-6$

㉠의 양변을 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$

이므로

$f'(x)=6x+2a=6x-4$

따라서

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=3x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=3-4+C=-6$에서

$C=-5$

따라서

$f(3)=27-12-5=10$

이므로

$a+f(3)=-2+10=8$

정답 ④

12. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=4\sqrt{7}$

즉,

$\overline{BC}=\sin\frac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의

길이도 $2\sqrt{7}$이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BCD})}=4\sqrt{7}$$

즉,

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sin(\angle \mathrm{BCD})\times 4\sqrt{7}$$
$$=\frac{2\sqrt{7}}{7}\times 4\sqrt{7}=8$$

한편, $\angle \mathrm{BDC}=\pi-\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times 8\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$x^2+8x-20=0$

$(x-2)(x+10)=0$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{\mathrm{CD}}=2$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}=8+2=10$

정답 ②

13. **출제의도** : 등차수열의 성질과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=-45<0$ 이고 $d>0$이므로

조건(가)를 만족시키기 위해서는

$a_m<0$, $a_{m+3}>0$

즉, $-a_m=a_{m+3}$ 에서 $a_m+a_{m+3}=0$

따라서,

$\{-45+(m-1)d\}+\{-45+(m+2)d\}=0$

$-90+(2m+1)d=0$

$(2m+1)d=90\cdots$㉠

이고 $2m+1$은 1보다 큰 홀수이므로 d는 짝수이다.

그런데, $90=2\times 3^2\times 5$ 이므로 ㉠을 만족시키는 90의 약수 중에서 짝수인 것은 2, 6, 10, 18, 30 이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2\times(-45)+(n-1)d\}}{2}>-100$$

$n\{-90+(n-1)d\}>-200\cdots$㉡

따라서 2, 6, 10, 18, 30 중에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉡을 만족시키는 경우는 18, 30 이므로 구하는 모든 자연수 d의 값의 합은

$18+30=48$

정답 ②

14. **출제의도** : 다항함수의 미분과 정적분을 활용하여 주어진 명제의 참과 거짓을 판정할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

이다.

따라서

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=x^3-3x^2+C\ (C\text{는 적분상수})$$

따라서

$f(x)-f(0)=x^3-3x^2$

이고

$f(x+p)-f(p)$

$=(x+p)^3-3(x+p)^2+C-(p^3-3p^2+C)$

$=x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x$

이므로

$$g(x)=\begin{cases}x^3-3x^2 & (x\le 0)\\ x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x & (x>0)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $p=1$이면

$$g(x)=\begin{cases} x^3-3x^2 & (x \le 0) \\ x^3-3x & (x>0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & (x<0) \\ 3x^2-3 & (x>0) \end{cases}$$

따라서 $g'(1)=3-3=0$ (참)

ㄴ.

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}g(x)=g(0)=0$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때

$$\lim_{x\to0-}g'(x)=\lim_{x\to0-}(3x^2-6x)=0$$

$$\lim_{x\to0+}g'(x)$$

$$=\lim_{x\to0+}\{3x^2+2(3p-3)x+(3p^2-6p)\}$$

$$=3p^2-6p$$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$3p^2-6p=0$

이어야 한다.

따라서 양수 p의 값은 $p=2$뿐이므로 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ.

$$\int_{-1}^{0}g(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{5}{4}$$

이고,

$$\int_{0}^{1}g(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}\{x^3+(3p-3)x^2+(3p^2-6p)x\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+(p-1)x^3+\frac{3p^2-6p}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+(p-1)+\frac{3p^2-6p}{2}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

이므로

$$\int_{-1}^{1}g(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}g(x)\,dx+\int_{0}^{1}g(x)\,dx$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}p^2-2p-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{3}{2}p^2-2p-2$$

$$=\frac{1}{2}(3p+2)(p-2)$$

따라서 $p\ge2$일 때 $\int_{-1}^{1}g(x)\,dx\ge0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

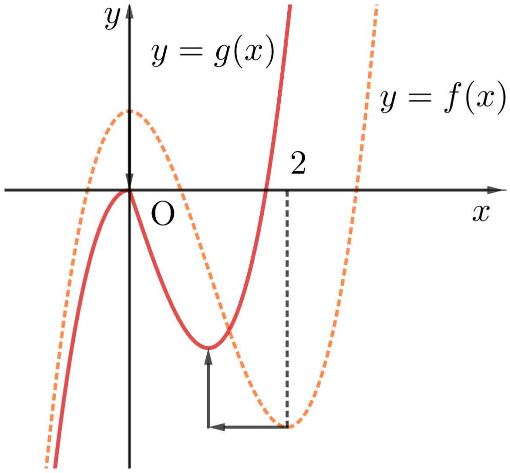
[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.

이때, 곡선 $y=f(x)-f(0)$은 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-f(0)$만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=f(x+p)-f(p)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 $-p$만큼, y축의 방향으로 $-f(p)$만큼 평행이동한 것이다.

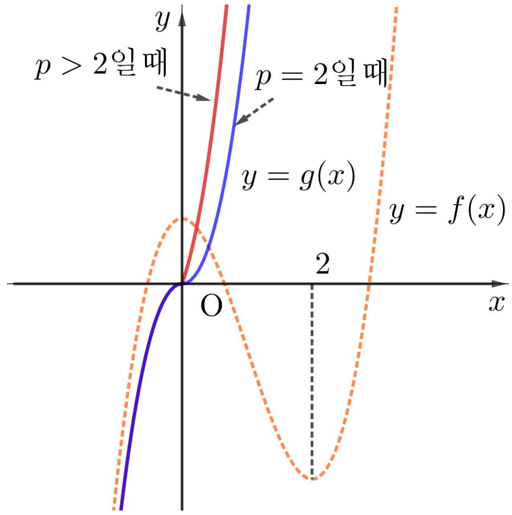
따라서 두 곡선 $y=f(x)-f(0)$, $y=f(x+p)-f(p)$는 모두 원점을 지나고 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=1$일 때, 곡선 $y=f(x+1)-f(1)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-f(1)$만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $g'(1)=0$이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
이때
$\lim\limits_{x\to 0-} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(3x^2-6x)=0$
이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면
$\lim\limits_{x\to 0+} g'(x)=0$
이어야 한다.
그런데 $f'(x)=0$인 양수 x의 값은 2뿐이므로 양수 p의 값은 2뿐이다.
따라서 양수 p의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. $p\ge 2$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$p=2$일 때,
함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로
$\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$
$p>2$일 때, 모든 실수 x에 대하여
$f(x+p)-f(p)\ge f(x+2)-f(2)$
이므로
$\int_{-1}^{1} g(x)dx\ge 0$
따라서 $p\ge 2$일 때 $\int_{-1}^{1} g(x)dx\ge 0$ (참)

15. 출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
먼저 a_5의 값을 구해 보자.
$-1\le a_5<-\frac{1}{2}$이면 $a_6=-2a_5-2$이므로
$a_5+a_6=0$에서 $-a_5-2=0$
즉, $a_5=-2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.
$-\frac{1}{2}\le a_5\le \frac{1}{2}$이면 $a_6=2a_5$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $3a_5=0$

즉, $a_5=0$

$\frac{1}{2}<a_5\le 1$이면 $a_6=-2a_5+2$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $-a_5+2=0$

즉, $a_5=2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5=0$이고 이때 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이다.

한편 $0\le a_{n+1}\le 1$일 때

$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$ 또는 $a_n=1-\frac{1}{2}a_{n+1}$

(ⅰ) $a_4=-1$인 경우

$a_3<0$, $a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_4=0$인 경우

㉠ $a_3=-1$인 경우

$a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3=0$인 경우

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이고,

$a_2=0$일 때 $a_1=1$이면 조건을 만족시키고, $a_2=1$일 때 $a_1=\frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_3=1$인 경우

$a_2=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$이며, 이것은 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a_4=1$인 경우

$a_3=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

㉠ $a_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2=\frac{3}{4}$인 경우

$a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2 100-2\log_2 5$

$=\log_2 100-\log_2 25$

$=\log_2 \frac{100}{25}$

$=\log_2 4$

$=\log_2 2^2$

$=2$

정답 2

17. 출제의도 : 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int (8x^3-12x^2+7)dx$$

$= 2x^4 - 4x^3 + 7x + C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0) = 3$이므로

$C = 3$

따라서

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$

이므로

$f(1) = 2 - 4 + 7 + 3 = 8$

정답 8

18. **출제의도** : 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k) = 45$에서

$\sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k = 45$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_k - b_k) = 3$에서

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 3$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$3\sum_{k=1}^{10} b_k = 42$

즉, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 14$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\left(b_k - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{10} b_k - 10 \times \frac{1}{2}$$
$$= 14 - 5 = 9$$

정답 9

19. **출제의도** : 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{64 - 96 + 20}{4} = -3$$

또한, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$ 이므로

$3a^2 - 12a + 5 = -3$, $3a^2 - 12a + 8 = 0$…㉠

㉠을 만족시키는 모든 실수 a는 $0 < a < 4$를 만족시키므로 모든 실수 a의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다.

따라서 $p = 3$, $q = 8$ 이므로

$p + q = 11$

정답 11

20. **출제의도** : 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $g(x)$를

$g(x) = f(x) + |f(x) + x| - 6x$

라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -7x & (f(x) < -x) \\ 2f(x) - 5x & (f(x) \geq -x) \end{cases}$$

이고, 주어진 방정식은

$g(x) = k$와 같다.

$f(x) = -x$에서

$\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10x = -x$,

$\frac{x}{2}(x^2 - 9x + 22) = 0$

이때 모든 실수 x에 대하여

$$x^2 - 9x + 22 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

이므로 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -x$는

오직 원점 (0,0)에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$를

$h(x)=2f(x)-5x$

$\quad=x^3-9x^2+15x$

라 하면

$$g(x)=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ h(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다.

$h'(x)=3x^2-18x+15$

$\quad=3(x-1)(x-5)$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값

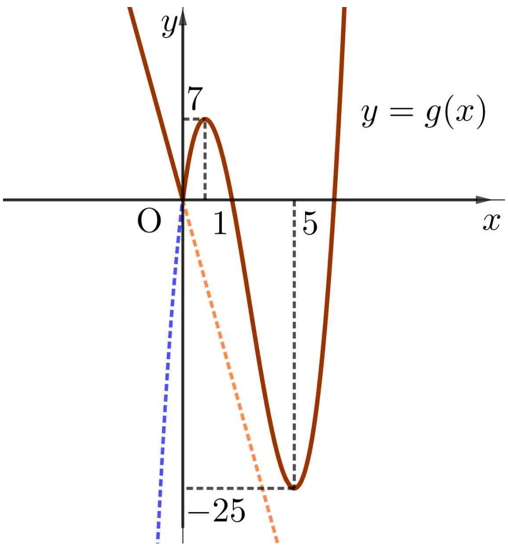
$h(1)=1-9+15=7$

을 갖고, $x=5$에서 극솟값

$h(5)=125-225+75=-25$

를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는

$0<k<7$

이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$1+2+3+\cdots+6$

$=\dfrac{6}{2}(1+6)=21$

정답 21

21. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표를 $(k,\ -k+4)$라 하면

$\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\dfrac{5}{2}\right)^2=2$

에서

$k=\dfrac{3}{2}$

즉, $A\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$이므로

$\dfrac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1}$

$a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{2}$

$a=\dfrac{25}{4}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0, \dfrac{4}{25}\right)$ 이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\dfrac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$
$$=\frac{96}{25}$$

이므로

$$50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$$

정답 192

22. **출제의도** : 함수의 연속성과 미분가능성 및 삼차함수의 그래프를 이해하고 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$i(x)=|f(x)|$로 놓으면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 x의 값에 대하여

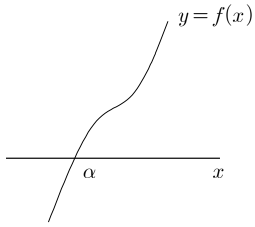
$$\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h},\ \lim_{h\to0-}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}$$

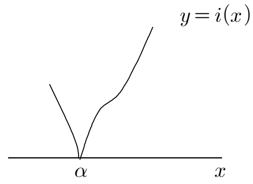
의 값이 항상 존재한다.

따라서,

$$\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}$$

(i) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq0$인 경우





$g(x)$
$$=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$
$$=f(x-3)\times$$
$$\left\{\lim_{h\to0+}\frac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$$
$$=\begin{cases}f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha)\\ 0 & (x=\alpha)\\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

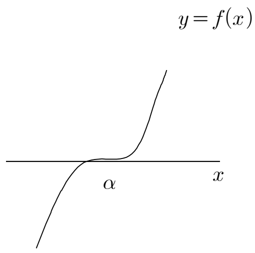
$$\lim_{x\to\alpha-}g(x)=\lim_{x\to\alpha+}g(x)=g(\alpha)$$

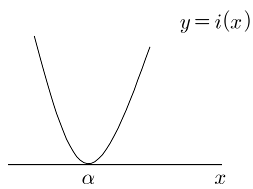
이어야 하므로

$$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$$

그런데 $f'(\alpha)\neq0$, $f(\alpha-3)\neq0$ 이므로 모순이다.

(ii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않고 $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$인 경우





$g(x)$
$$=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$= f(x-3)\times$

$\left\{\lim_{h\to 0+}\dfrac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\dfrac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$

$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ 0 & (x=\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to\alpha-} g(x)=\lim_{x\to\alpha+} g(x)=g(\alpha)$

이어야 하고 $f'(\alpha)=0$ 이므로

$f(\alpha-3)\times\{-2f'(\alpha)\}$

$=f(\alpha-3)\times\{2f'(\alpha)\}=0$

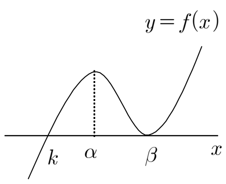
이 성립한다.

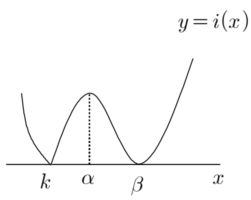
그런데, 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\alpha+3$으로 2개 뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iv) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)\neq 0$, $f(\beta)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<\beta)$ 인 경우



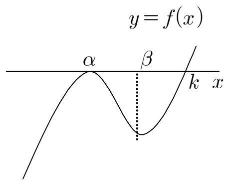


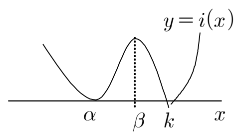
(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(v) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(l)=0$, $f(m)=0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(k<\alpha<l<\beta<m)$ 인 경우

(i)의 경우와 같이 $f(k)=0$을 만족시키는 $x=k$에서 함수 $g(x)$는 연속이 아니므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(vi) 함수 $f(x)$의 극값이 존재하고 $f(k)=0$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)\neq 0$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(\alpha<\beta<k)$ 인 경우





$g(x)$

$=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\dfrac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$

$=f(x-3)\times$

$\left\{\lim_{h\to 0+}\dfrac{i(x+h)-i(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\dfrac{i(x-h)-i(x)}{-h}\right\}$

$=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<k) \\ 0 & (x=k) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>k)\end{cases}$

이때 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$\lim_{x\to k-} g(x)=\lim_{x\to k+} g(x)=g(k)$

이어야 하므로

$f(k-3)\times\{-2f'(k)\}=f(k-3)\times\{2f'(k)\}=0$

그런데 $f'(k)\neq 0$ 이므로 $f(k-3)=0$이고

$k-3=\alpha\cdots$㉠

즉, $k=\alpha+3$이면 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근은

$x<k$일 때 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

$x=k$일 때 $x=k$

$x>k$일 때 $x=k+3$

이고 조건 (나)에서 서로 다른 네 실근의

합이 4이므로

$\alpha+\beta+k+k+3=7$

$\alpha+\beta+2k=4 \cdots$ ㉡

또한,

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$

이고 $f'(x)=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$이므로

$f'(x)=0$에서

$\beta=\dfrac{\alpha+2k}{3}$

㉡에 대입하여 정리하면

$\alpha+2k=3$

㉠,㉡에서 $\alpha=-1$, $k=2$ 이므로

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

따라서

$f(5)=(5+1)^2(5-2)=36\times3=108$

정답 108

[선택: 확률과 통계]
23. ③ 24. ③ 25. ② 26. ① 27. ⑤
28. ④ 29. 78 30. 218

23. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{E}(X)=60\times\frac{1}{4}$

$=15$

정답 ③

24. 출제의도 : 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
모든 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는
$4\times4=16$
$a\times b>31$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
$(5, 8)$, $(7, 6)$, $(7, 8)$
따라서 구하는 확률은
$\frac{3}{16}$

정답 ③

25. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r$

$={}_5\mathrm{C}_r a^r x^{10-3r}$

(단, $r=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

이때, $\frac{1}{x^2}$의 계수는
$10-3r=-2$에서 $r=4$이므로
${}_5\mathrm{C}_4 a^4=5a^4$
또 x의 계수는
$10-3r=1$에서 $r=3$이므로
${}_5\mathrm{C}_3 a^3=10a^3$
따라서 $a>0$이므로
$5a^4=10a^3$에서
$a=2$

정답 ②

26. 출제의도 : 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 E, 주사위의 눈의 수가 5 이상인 사건을 F라 하면
구하는 확률은

$\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$

$\mathrm{P}(E)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{15}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{15}$

$=\frac{1}{45}+\frac{6}{45}$

$=\frac{7}{45}$

$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{45}$

따라서

$$\mathrm{P}(F \mid E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}$$

$$=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{7}{45}}$$

$$=\frac{1}{7}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 표본평균의 확률분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X의 표준편차를 a라 하면

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(220,\, a^2)$을 따른다.

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(220,\, \left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\, 1)$을 따른다. 이때,

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 215)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{215-220}{\frac{a}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le -\frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{5\sqrt{n}}{a}\right)$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{5\sqrt{n}}{a}\right)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{5\sqrt{n}}{a}\right)=0.3413$이므로

$\frac{5\sqrt{n}}{a}=1$

$\frac{a}{\sqrt{n}}=5$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, 조건 (나)에서 확률변수 Y의 표준편차는 $\frac{3a}{2}$이므로

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}\left(240,\, \left(\frac{3a}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(240,\, \left(\frac{\frac{3a}{2}}{3\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고

㉠에서 $\frac{\frac{3a}{2}}{3\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{a}{\sqrt{n}}=\frac{5}{2}$이므로,

$Z=\frac{\overline{Y}-240}{\frac{5}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\, 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 235)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{235-240}{\frac{5}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge -2)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)+0.5$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+0.5$

$=0.4772+0.5$

$=0.9772$

정답 ⑤

28. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)와 조건 (다)에서

$f(3) \neq 1$, $f(4) \neq 6$

조건 (가)에서 $f(3)+f(4)$가 5의 배수인 $f(3), f(4)$의 순서쌍 $(f(3), f(4))$는

$(4, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 4)$, $(5, 5)$

(i) $f(3)=4, f(4)=1$인 경우

$f(1), f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3^2=9$

$f(5), f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$5^2=25$

즉 함수 f의 개수는

$9\times25=225$

(ii) $f(3)=2, f(4)=3$인 경우

$f(1), f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$1^2=1$

$f(5), f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3^2=9$

즉 함수 f의 개수는

$1\times9=9$

(iii) $f(3)=3, f(4)=2$인 경우

$f(1), f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2^2=4$

$f(5), f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4^2=16$

즉 함수 f의 개수는

$4\times16=64$

(iv) $f(3)=6, f(4)=4$인 경우

$f(1), f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$5^2=25$

$f(5), f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2^2=4$

즉 함수 f의 개수는

$25\times4=100$

(v) $f(3)=5, f(4)=5$인 경우

$f(1), f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

$4^2=16$

$f(5), f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

$1^2=1$

즉 함수 f의 개수는

$16\times1=16$

(i) ~ (v)에서

구하는 함수 f의 개수는

$225+9+64+100+16=414$

정답 ④

29. 출제의도 : 확률분포가 표로 주어진 확률변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 갖는 값이 $X=5$에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$\mathrm{E}(X)=5$

또 $\mathrm{V}(X)=\dfrac{31}{5}$이므로

$\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{31}{5}$에서

$\mathrm{E}(X^2)=25+\dfrac{31}{5}$

이때,

$\mathrm{E}(X^2)$

$=1^2\times a+3^2\times b+5^2\times c+7^2\times b+9^2\times a$

$=82a+58b+25c$

이므로

$82a+58b+25c=25+\dfrac{31}{5}$ …… ㉠

한편, 확률변수 Y가 갖는 값이 $Y=5$에 대하여 확률분포가 대칭이므로

$\mathrm{E}(Y)=5$이고,

$\mathrm{E}(Y^2)$

$=1^2\times\left(a+\dfrac{1}{20}\right)+3^2\times b+5^2\times\left(c-\dfrac{1}{10}\right)$

$\qquad+7^2\times b+9^2\times\left(a+\dfrac{1}{20}\right)$

$=82a+58b+25c+\dfrac{1}{20}-\dfrac{5}{2}+\dfrac{81}{20}$

$=82a+58b+25c+\dfrac{8}{5}$

㉠에서

$\mathrm{E}(Y^2)=25+\dfrac{31}{5}+\dfrac{8}{5}$

$\qquad=25+\dfrac{39}{5}$

따라서

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$

$\qquad=25+\dfrac{39}{5}-5^2$

$\qquad=\dfrac{39}{5}$

이므로

$10\times\mathrm{V}(Y)=10\times\dfrac{39}{5}=78$

정답 78

30. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

사인펜이 14개이므로

조건 (가)와 (다)에 의해

네 명의 학생 A, B, C, D 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받거나 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는다.

(ⅰ) 네 명의 학생 중 2명은 짝수 개의 사인펜을 받고 나머지 2명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

4명의 학생 중 짝수 개의 사인펜을 받는 2명의 학생을 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2$

두 명의 학생 A, B는 짝수 개의 사인펜을 받고 두 명의 학생 C, D는 홀수 개의 사인펜을 받는다고 하면 네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각

$2a+2,\ 2b+2,\ 2c+1,\ 2d+1$($a,\ b,\ c,\ d$는 음이 아닌 정수)이다.

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+1)+(2d+1)=14$

에서

$a+b+c+d=4$

방정식 $a+b+c+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 순서쌍

$(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4$

조건 (나)에 의해 $a\neq4,\ b\neq4$이므로

주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times({}_4\mathrm{H}_4-2)={}_4\mathrm{C}_2\times({}_7\mathrm{C}_4-2)=198$

(ⅱ) 네 명의 학생 모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우

네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수는 각각

$2a+2,\ 2b+2,\ 2c+2,\ 2d+2$($a,\ b,\ c,\ d$는 음이 아닌 정수)이다.

$(2a+2)+(2b+2)+(2c+2)+(2d+2)=14$

에서

$a+b+c+d=3$

방정식 $a+b+c+d=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 순서쌍

$(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서

구하는 경우의 수는

$198+20=218$

정답 218

[다른 풀이]

A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d=14$

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,$

$d=d'+1$로 놓으면

방정식 $a'+b'+c'+d'=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로

$$
\begin{aligned}
{}_4H_{10} &= {}_{13}C_{10} \\
&= {}_{13}C_3 \\
&= \frac{13\times12\times11}{3\times2\times1} \\
&= 286
\end{aligned}
$$

한편, 네 명이 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는

$a=2a''+1,\ b=2b''+1,\ c=2c''+1,$

$d=2d''+1$로 놓으면

방정식 $a''+b''+c''+d''=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d''의 순서쌍 (a'', b'', c'', d'')의 개수와 같으므로

$${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

즉 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키는 경우의 수는

$286-56=230$

한편, 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키고, 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우 각 학생이 받은 사인펜의 개수는 10, 2, 1, 1뿐이고 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

따라서 모든 조건을 만족시키는 경우의 수는

$230-12=218$

정답 218

■ [선택: 미적분]

23. ③ 24. ② 25. ④ 26. ② 27. ③
28. ① 29. 24 30. 115

23. **출제의도** : 등비수열의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$
$$=\frac{6+5\times0}{1+2\times0}$$
$$=6$$

정답 ③

24. **출제의도** : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$2\cos\alpha=3\sin\alpha$에서

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}$ 이므로

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}$$
$$=\frac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}$$

이고, $\tan(\alpha+\beta)=1$이므로

$$\frac{2+3\tan\beta}{3-2\tan\beta}=1$$

따라서

$$\tan\beta=\frac{1}{5}$$

정답 ②

25. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 곡선에서 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x=e^t-4e^{-t}$, $y=t+1$ 에서

$\frac{dx}{dt}=e^t+4e^{-t}$,

$\frac{dy}{dt}=1$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{e^t+4e^{-t}}$$

따라서 $t=\ln2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{1}{e^{\ln2}+4e^{-\ln2}}=\frac{1}{2+4\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

정답 ④

26. **출제의도** : 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

x좌표가 $t(1\le t\le2)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{3t+1}{t^2}}$인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{3t+1}{t^2}$$

EBS

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_1^2 S(t)dt$$
$$=\int_1^2 \frac{3t+1}{t^2}dt$$
$$=\int_1^2\left(\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\left[3\ln|t|-\frac{1}{t}\right]_1^2$$
$$=\left(3\ln 2-\frac{1}{2}\right)-(3\ln 1-1)$$
$$=\frac{1}{2}+3\ln 2$$

정답 ②

27. **출제의도** : 한없이 반복되는 도형에서 등비급수를 활용하여 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 $C_1D_1F_1$에서

$\angle C_1D_1F_1=\frac{\pi}{6}$,

$\overline{C_1D_1}=1$

이므로

$\overline{C_1F_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서

$\angle C_1D_1E_1=\frac{\pi}{3}$

이므로

$\overline{C_1E_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{3}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

이때,

$\overline{E_1F_1}=\overline{C_1E_1}-\overline{C_1F_1}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $E_1F_1H_1$에서

$\angle H_1E_1F_1=\frac{\pi}{6}$

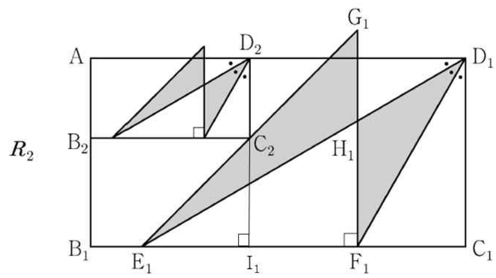
이므로

$\overline{F_1H_1}=\overline{E_1F_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$

$$S_1=\triangle E_1F_1G_1+\triangle E_1F_1D_1-2\times\triangle E_1F_1H_1$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1G_1}+\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1D_1}-2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1H_1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 1-2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{6-\sqrt{3}}{9}$$

한편, $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$이므로

$\overline{AB_2}=k$, $\overline{B_2C_2}=2k(k>0)$이라 하자.



점 C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{E_1I_1}=\overline{C_2I_1}=1-k$,

$\overline{I_1C_1}=2-2k$

이므로

$(1-k)+(2-2k)=\sqrt{3}$

$k=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비

가 $1:\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는

$1:\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이

$\dfrac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가 $\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$인

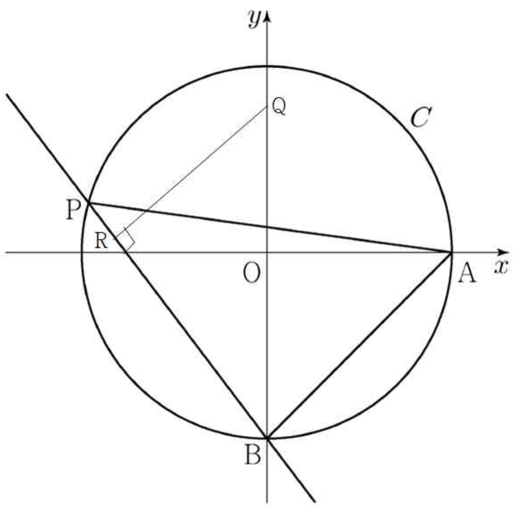
등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\dfrac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

정답 ③

28. **출제의도** : 삼각함수의 적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\overline{QB}=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$

이고

직각삼각형 QRB에서

$\angle QBR=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

이므로

$\overline{BR}=\overline{QB}\times\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2(1+\cos\theta)\sin\theta$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{BP}}{\sin\theta}=2\times2$

이므로

$\overline{BP}=4\sin\theta$

따라서

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \overline{BP}-\overline{BR} \\ &= 4\sin\theta-2(1+\cos\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=\left[-2\cos\theta-\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-2\cos\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)-\left(-2\cos\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\left(-1-\frac{3}{4}\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

정답 ①

29. **출제의도** : 함수의 극대, 극소 및 함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이므로

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$

$g'(x)=0$에서

$f'(x)=0$ 또는 $f(x)+3=0$

$f(x)$가 이차함수이므로

조건 (가), (나)에 의해

$f'(a)=0,\ f(a)=6$

$f(b)+3=0,\ f(b+6)+3=0$

이어야 한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 p라 하면

$f(b)+3=0,\ f(b+6)+3=0$이므로

$f(x)+3=p(x-b)(x-b-6)$

즉, $f(x)=p(x-b)(x-b-6)-3$ …… ㉠

이때, $f'(a)=0$이므로

$$\frac{b+(b+6)}{2}=a$$

$b=a-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=p(x-a+3)(x-a-3)-3$

이므로

$f(a)=-9p-3=6$에서

$p=-1$

방정식 $f(x)=0$에서

$-(x-a+3)(x-a-3)-3=0$

$(x-a)^2-6=0$

$x=a\pm\sqrt{6}$

따라서

$(\alpha-\beta)^2=\{(a+\sqrt{6})-(a-\sqrt{6})\}^2=24$

정답 24

30. 출제의도 : 삼각함수의 극한 및 함수의 극값을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉,

$\lim_{x\to0}\sin(\pi\times f(x))=\sin(\pi\times f(0))=0$

에서

$f(0)=n$(n은 정수)

이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$f(x)=9x^3+ax^2+bx+n$($a,\ b$는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때, $h(x)=\sin(\pi\times f(x))$라 하면

$h(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$$

이다. 즉,

$h'(0)=0$

이다.

이때, $h'(x)=\pi f'(x)\times\cos(\pi\times f(x))$이므로

$h'(0)=\pi f'(0)\times\cos(n\pi)=0$에서

$f'(0)=0$

$f'(x)=27x^2+2ax+b$에서

$f'(0)=b=0$ ------------------㉠

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)$

이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이므로

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)$

이다.

$\lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 9+a+n$,

$\lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = n$

이므로

$9+a+n=n$

$a=-9$ ------------------㉡

$f'(x)=27x^2-18x=9x(3x-2)$

이므로

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=\dfrac{2}{3}$에서 극소이다.

조건 (나)에 의해

$f(0)\times f\left(\dfrac{2}{3}\right)=5$

이므로

$n\times\left(n-\dfrac{4}{3}\right)=5$

$(3n+5)(n-3)=0$

n이 정수이므로

$n=3$ ------------------㉢

㉠~㉢에 의해 $f(x)=9x^3-9x^2+3$

따라서,

$$\int_0^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xg(x)dx+\int_1^2 xg(x)dx+\int_2^3 xg(x)dx+\int_3^4 xg(x)dx+\int_4^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)g(x+1)dx+\int_0^1 (x+2)g(x+2)dx+\int_0^1 (x+3)g(x+3)dx+\int_0^1 (x+4)g(x+4)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)f(x)dx+\int_0^1 (x+2)f(x)dx+\int_0^1 (x+3)f(x)dx+\int_0^1 (x+4)f(x)dx$$

$$=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx$$

$$=5\int_0^1 (9x^4-9x^3+3x)dx+10\int_0^1 (9x^3-9x^2+3)dx$$

$$=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}$$

$$=\frac{111}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=111$이므로

$p+q=4+111=115$

정답 115

■ **[선택: 기하]**

23. ⑤ 24. ④ 25. ② 26. ③ 27. ①
28. ① 29. 40 30. 45

23. **출제의도** : 공간좌표에서 대칭점과 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 B는 점 A$(3, 0, -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점이므로
B$(3, 0, 2)$
따라서 C$(0, 4, 2)$이므로
$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(0-3)^2+(4-0)^2+(2-2)^2}$
$= 5$

정답 ⑤

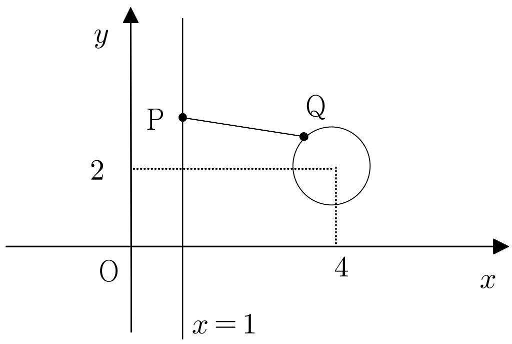
24. **출제의도** : 쌍곡선의 점근선을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$의 점근선의 방정식은 $y = \pm\frac{4}{a}x$
이때, 점근선 중 하나의 기울기가 3이므로, $a > 0$이므로
$\frac{4}{a} = 3$
따라서 $a = \frac{4}{3}$

정답 ④

25. **출제의도** : 성분으로 나타낸 벡터의 연산을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$에서
$\vec{a} \cdot \vec{p} = \vec{a} \cdot \vec{b}$
$\vec{a} \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$
이때, $\vec{a} = (3, 0)$, $\vec{b} = (1, 2)$이므로
점 P(x, y)에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y)$라 하면
$(3, 0) \cdot (x-1, y-2) = 0$
$3(x-1) = 0$
$x = 1$
그러므로 점 P는 직선 $x = 1$ 위의 점이다.
또, $|\vec{q} - \vec{c}| = 1$이고 $\vec{c} = (4, 2)$이므로
$\vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$라 하면 점 Q는 중심이 $(4, 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.



한편,
$|\vec{p} - \vec{q}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$
$= |\overrightarrow{\mathrm{QP}}|$
$= \overline{\mathrm{PQ}}$
따라서, 이 값의 최솟값은 원의 중심 $(4, 2)$와 직선 $x = 1$ 사이의 거리에서 반지름의 길이 1을 빼면 되므로
$3 - 1 = 2$

정답 ②

26. **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 p의 값을 구할 수 있는가?

EBS

정답풀이 :

두 점 A, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

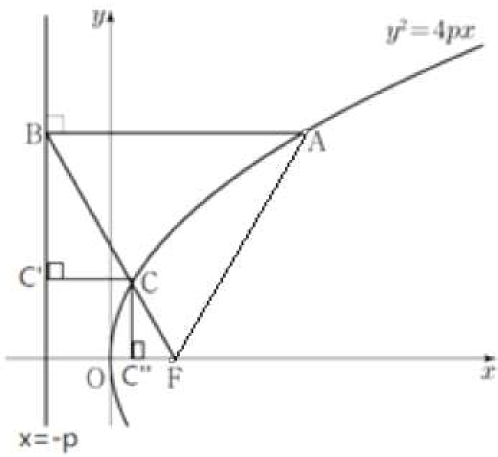
$\overline{\mathrm{AB}}=x_1+p$

이때, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF}}$이므로

$\overline{\mathrm{BF}}=x_1+p$ …… ㉠

한편, 점 C에서 포물선의 점근선에 내린 수선의 발을 C$'$이라 하면

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CC'}}=x_2+p$ …… ㉡



이때, $\overline{\mathrm{BC}}+3\overline{\mathrm{CF}}=6$이므로 ㉠과 ㉡에서

$\overline{\mathrm{BC}}+3\overline{\mathrm{CF}}$

$=\overline{\mathrm{BF}}+2\overline{\mathrm{CF}}$

$=(x_1+p)+2(x_2+p)$

$=x_1+2x_2+3p$

$=6$ …… ㉢

한편, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BF}}$이고 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼각형 ABF는 정삼각형이다. 그러므로

$\angle\mathrm{OFB}=60^\circ$

이때,

$\overline{\mathrm{BF}}\cos 60^\circ=2p$

$\overline{\mathrm{CF}}\cos 60^\circ=p-x_2$

이므로

$(x_1+p)\times\frac{1}{2}=2p,$

$(x_2+p)\times\frac{1}{2}=p-x_2$

즉,

$x_1=3p,\ x_2=\frac{1}{3}p$ …… ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$3p+\frac{2}{3}p+3p=6,\ \frac{20}{3}p=6$

따라서

$p=\frac{9}{10}$

정답 ③

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이의 합의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P$'$이라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}\perp$(평면 BCD)이고

$\overline{\mathrm{AP'}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로

삼수선의 정리에 의해

$\overline{\mathrm{DP'}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이다.

이때,

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{DP}}\geq\overline{\mathrm{AP'}}+\overline{\mathrm{DP'}}$

이므로 구하는 최소의 길이는

$\overline{\mathrm{AP'}}+\overline{\mathrm{DP'}}$

이다. 한편, 직각삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DB}}\times\overline{\mathrm{DC}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{DP'}}$

$\overline{\mathrm{DB}}\times\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{DP'}}$

$2\times2\sqrt{3}=4\times\overline{\mathrm{DP'}}$

$\overline{\mathrm{DP'}}=\sqrt{3}$ …… ㉠

이때, 직각삼각형 ADP$'$에서

$\overline{AP'} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DP'}^2}$

$= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= 2\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 구하는 최솟값은

$\overline{AP'} + \overline{DP'} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3}$

정답 ①

28. 출제의도 : 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있고 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 변의 길이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $P(2, 3)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{2x}{16} + \frac{3y}{12} = 1$

$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$

그러므로 점 S의 좌표는 $(8, 0)$이다

한편, $c = \sqrt{16 - 12} = 2$이므로

$F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$

이때, 두 삼각형 $F'FQ$, $F'SR$는

$\angle QF'F = \angle RF'S$이고 $\overline{FQ} // \overline{SR}$이므로

닮은 삼각형이다.

한편, $\overline{F'F} = 4$, $\overline{F'S} = 10$이므로 두 삼각형 $F'FQ$, $F'SR$의 둘레의 길이의 비는

$2 : 5$

한편, 삼각형 $F'FQ$의 둘레의 길이는 타타원의 정의에 의해

$\overline{FQ} + \overline{QF'} = 2 \times 4 = 8$

이므로

$\overline{FF'} + \overline{FQ} + \overline{QF'} = 4 + 8 = 12$

따라서, 구하는 삼각형 SRF'의 둘레의 길이를 l이라 하면

$12 : l = 2 : 5$

이므로

$l = 30$

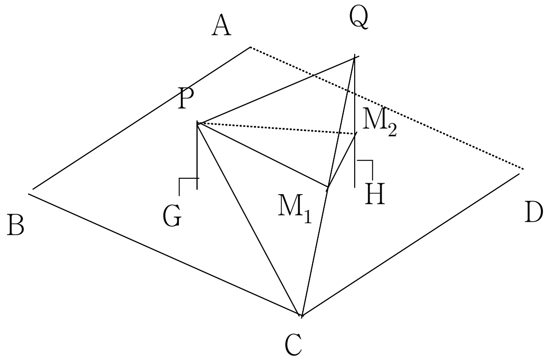
정답 ①

29. 출제의도 : 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{PG} = \sqrt{3}$, $\overline{QH} = 2\sqrt{3}$이므로 점 P를 지나고 평면 ABCD와 평행한 평면이 두 선분 QC, QH와 만나는 점을 각각 M_1, M_2라 하면 두 점은 중점이다.

이때, 구하는 평면이 이루는 각은 두 평면 PM_1M_2, PM_1Q가 이루는 각이다.



한편 점P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P', 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 O_1이라 하면

$\overline{O_1P'} = 4\cos 60^\circ = 2$

$\overline{P'G} = \sqrt{\overline{PP'}^2 - \overline{PG}^2}$

$= \sqrt{(4\sin 60^\circ)^2 - (\sqrt{3})^2}$

$= 3$

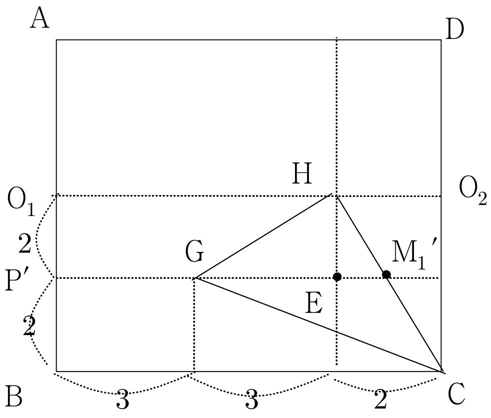
또, 점 Q에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 Q', 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심을 O_2라 하면

$\overline{HO_2} = \sqrt{\overline{QO_2}^2 - \overline{QH}^2}$

$= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2}$

$= 2$

이때, 점 M_1의 평면 ABCD 위로 정사영시킨 점을 $M_1{}'$이라 $M_1{}'$은 선분 CH의 중점이므로 그림과 같다.



이때,

$\overline{GH} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\overline{HM_1{}'} = \dfrac{1}{2}\overline{HC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{5}$

또, 선분 $GM_1{}'$과 점 H를 지나고 선분 BC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하면

$\overline{GM_1{}'} = \overline{GE} + \overline{EM_1{}'} = 3+1 = 4$

이때,

$\overline{PM_2} = \overline{GH} = \sqrt{13}$,

$\overline{M_1M_2} = \overline{HM_1{}'} = \sqrt{5}$,

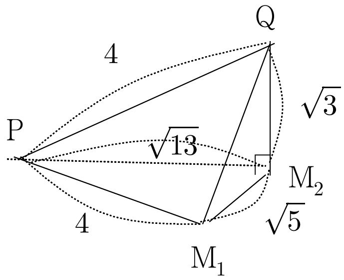
$\overline{PM_1} = \overline{GM_1{}'} = 4$

이고

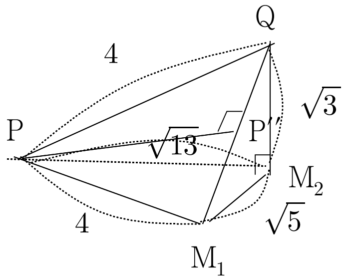
$\overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{13})^2+(\sqrt{3})^2} = 4$,

$\overline{QM_1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{2}$

이므로 다음 그림과 같다.



점 P에서 선분 QM_1에 내린 수선의 발을 P''이라 하자.

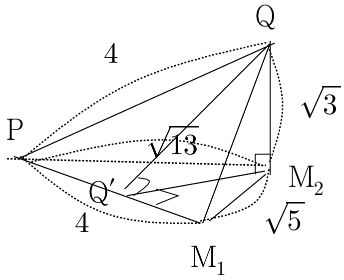


이때, $\angle PM_1Q = \alpha$라 하면

$$\cos\alpha = \frac{\overline{M_1P''}}{\overline{PM_1}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{M_1Q}}{\overline{PM_1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

또, 점 Q에서 선분 PM_1에 내린 수선의 발을 Q'이라 하면 $\overline{QQ'} \perp \overline{PM_1}$이고 $\overline{QM_2} \perp (\text{평면}PM_1M_2)$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{M_2Q'} \perp \overline{PM_1}$



이때,

$\overline{M_1Q'}=\overline{QM_1}\cos\alpha$

$=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$=1$

이므로

$\overline{QQ'}=\sqrt{\overline{QM_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}$

$=\sqrt{7}$

$\overline{M_2Q'}=\sqrt{\overline{M_2M_1}^2-\overline{Q'M_1}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$

따라서,

$\cos\theta=\dfrac{\overline{Q'M_2}}{\overline{QQ'}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

이므로

$70\times\cos^2\theta=70\times\dfrac{4}{7}=40$

정답 40

30. 출제의도 : 벡터의 내적의 정의를 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$|\overrightarrow{AP}|=1$이므로 점 P는 중심이 $A(-3,1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

또, $|\overrightarrow{BQ}|=2$이므로 점 Q는 중심이 $B(0,2)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

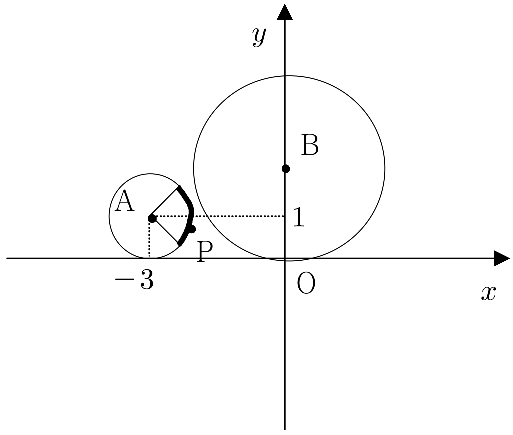
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$

그러므로 점 P를 나타내면 그림과 같다.



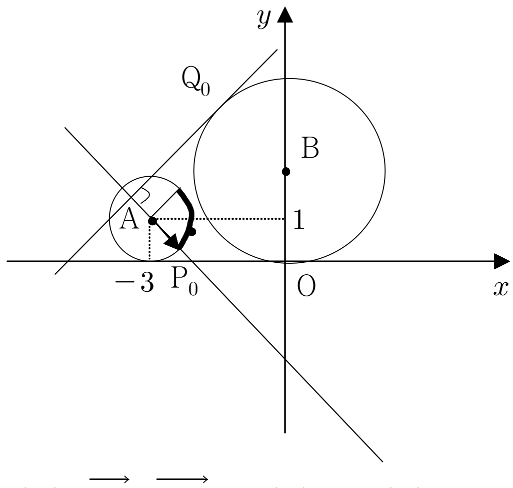
또, 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'$

$=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'$

그러므로 이 값이 최소이기 위해서는 점 P는 A를 지나고 직선 기울기가 -1인 직선 위의 점이어야 하고, 점 Q는 이 직선과 수직이면서 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하는 점 중 제 2사분면의 점이어야 한다.



한편, $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\geq1$에서 두 벡터

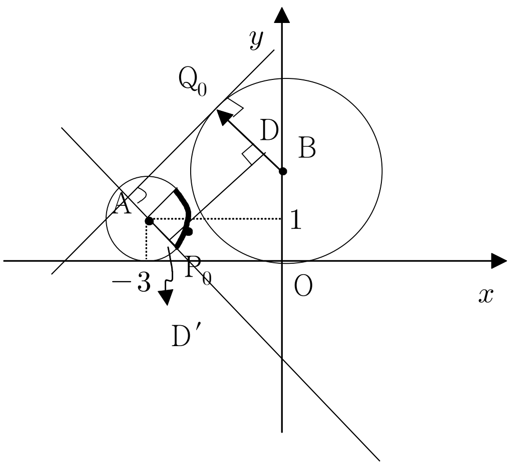
$\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{BQ_0}$가 이루는 각의 크기를 θ''이라 하면

$\left|\overrightarrow{BX}\right|\left|\overrightarrow{BQ_0}\right|\cos\theta'' \geq 1$

$2\left|\overrightarrow{BX}\right|\cos\theta'' \geq 1$

$\left|\overrightarrow{BX}\right|\cos\theta'' \geq \dfrac{1}{2}$

그러므로 선분 BQ_0위의 점 D를 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}$가 되도록 잡은 후, 점 D에서 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 점 X는 선분 AD′위의 점이다.



따라서, $\left|\overrightarrow{Q_0X}\right|$의 최댓값은 X가 D′일 때 가지므로 $\left|\overrightarrow{Q_0X}\right|^2$의 최댓값은

$$\begin{aligned}\overline{Q_0D'}^2 &= \overline{Q_0D}^2+\overline{DD'}^2\\ &=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2\\ &=\frac{9}{4}+8\\ &=\frac{41}{4}\end{aligned}$$

그러므로

$p+q=4+41=45$

정답 45