

2024학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	④	2	②	3	⑤	4	④	5	①
6	③	7	⑤	8	①	9	②	10	③
11	④	12	③	13	③	14	①	15	④
16	①	17	②	18	④	19	⑤	20	④
21	②	22	5	23	65	24	29	25	12
26	22	27	18	28	144	29	28	30	47

해설

1. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$$\sqrt[3]{4 \times 2^3} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^3} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{3}} = 2$$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$$\log_3 24 + \log_3 \frac{3}{8} = \log_3 \left(24 \times \frac{3}{8} \right) = \log_3 3^2 = 2$$

3. [출제의도] 부채꼴의 반지름의 길이 계산하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ , 호의 길이를 l 이라 하면

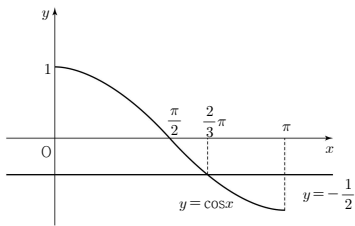
$$l = r\theta \text{에서 } \frac{2}{3}\pi = r \times \frac{3}{4}\pi \text{이므로 } r = \frac{2}{3}\pi \times \frac{4}{3\pi} = \frac{8}{9}$$

4. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

$$2\cos x + 1 = 0 \text{에서 } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 방정식 $\cos x = -\frac{1}{2}$ 의 해는

함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나는 점의 x 좌표와 같다.



$$\text{따라서 } x = \frac{2}{3}\pi$$

5. [출제의도] 상용로그의 성질 이해하기

수	...	4	5	6	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.26274	.6284	.6294	...
4.36375	.6385	.6395	...
4.46474	.6484	.6493	...

$\log 43.5 = \log(4.35 \times 10) = \log 4.35 + 1$
이 고 상용로그표에서 $\log 4.35 = 0.6385$ 이므로
 $\log 43.5 = 1.6385$

6. [출제의도] 사인법칙 이해하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로
 $\frac{BC}{\sin A} = 2 \times 6 = 12$ 에서 $BC = 12 \sin A = 12 \times \frac{1}{4} = 3$

7. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 함수값 계산하기

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이고 } \cos \theta = -\frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{7}{16}$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \sin \theta > 0 \text{이므로 } \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

8. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \log_3(x+a) + b$ 의 그래프의 점근선이 직선

$$x = -4 \text{이므로 } a = 4$$

한편 점 $(5, 0)$ 이 그래프 위의 한 점이므로

$$0 = \log_3 9 + b, b = -2$$

$$\text{따라서 } a + b = 2$$

9. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y = \tan ax + b$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $b = 2$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 증가하므로 $a > 0$

$$\text{주기가 } 4\pi \text{이므로 } \frac{\pi}{a} = 4\pi, \text{ 즉 } a = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } ab = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

10. [출제의도] 지수함수의 역함수 이해하기

함수 $y = 5^x + 1$ 의 역함수의 그래프가

점 $(4, \log_5 a)$ 를 지나므로

함수 $y = 5^x + 1$ 의 그래프는 점 $(\log_5 a, 4)$ 를 지난다.

따라서 $4 = 5^{\log_5 a} + 1$ 이고 로그의 성질에 의하여 $a + 1 = 4$ 이므로 $a = 3$

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y = 4^x - 6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프를 나타낸 함수는 $y = 4^{x-a} - 6 + b$ 이다.

이 함수의 그래프의 점근선이 직선 $y = -2$ 이므로

$$-6 + b = -2,$$

$$b = 4$$

한편 이 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = 4^{-a} - 2,$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } ab = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$$

12. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최솟값 구하는 문제 해결하기

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{이므로}$$

$$f(x) = 2\cos^2 x + 2\sin x + k$$

$$= 2(1 - \sin^2 x) + 2\sin x + k$$

$$= -2\sin^2 x + 2\sin x + 2 + k$$

$$\sin x = t \text{라 하면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

$$y = -2t^2 + 2t + 2 + k$$

$$= -2\left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{2} + k$$

$$= -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} + k$$

함수 $y = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} + k$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값

$\frac{5}{2} + k$ 를 갖는다. 따라서 $\frac{5}{2} + k = \frac{15}{2}$, 즉 $k = 5$

그러므로 함수 $y = -2t^2 + 2t + 7$ 은 $t = -1$ 에서

최솟값 $-2 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 7 = 3$ 을 갖는다.
즉 $f(x)$ 의 최솟값은 3이다.

13. [출제의도] 지수함수가 포함된 부등식 이해하기

$$2^{2x+3} + 2 \leq 17 \times 2^x,$$

$$2^{2x+3} - 17 \times 2^x + 2 \leq 0$$

에서 $2^x = t (t > 0)$ 이라 하면

$$8t^2 - 17t + 2 \leq 0,$$

$$(t-2)(8t-1) \leq 0,$$

$$\frac{1}{8} \leq t \leq 2,$$

$$2^{-3} \leq 2^x \leq 2^1,$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

이고 이를 만족시키는 모든 정수 x 의 값은 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이므로 개수는 5이다.

14. [출제의도] 로그의 정의 이해하기

$\log_a(x^2 + ax + a + 8)$ 이 정의되기 위해서는

$$a > 0, a \neq 1, x^2 + ax + a + 8 > 0$$

이어야 한다.

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 + ax + a + 8 > 0$ 이 성립하기 위해서는 이차방정식 $x^2 + ax + a + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 한다.

$$D = a^2 - 4(a+8) = a^2 - 4a - 32 = (a+4)(a-8) < 0,$$

$$\text{즉 } -4 < a < 8 \text{이어야 한다.}$$

따라서 $a > 0, a \neq 1, -4 < a < 8$ 을 모두 만족시키는 모든 정수 a 의 값의 합은

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 \text{이다.}$$

15. [출제의도] 삼각함수의 정의 이해하기

점 A의 좌표는 $(-2, a) (a > 0)$ 이라 하면

점 B의 좌표는 $(-2, -a)$ 이고 $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ 이므로

$$\cos \alpha = -\frac{2}{r}, \sin \beta = -\frac{a}{r}$$

$$2 \cos \alpha = 3 \sin \beta \text{에서}$$

$$2 \times \left(-\frac{2}{r}\right) = 3 \times \left(-\frac{a}{r}\right),$$

$$a = \frac{4}{3}$$

한편 $\sin \alpha = \frac{a}{r}, \cos \beta = -\frac{2}{r}$ 이므로

$$r(\sin \alpha + \cos \beta) = r \left(\frac{a}{r} + \left(-\frac{2}{r}\right) \right)$$

$$= a + (-2) = \frac{4}{3} + (-2)$$

$$= -\frac{2}{3}$$

16. [출제의도] 삼각형의 넓이와 코사인법칙을 활용하여 선분의 길이의 곱 구하는 문제 해결하기

$\angle DAB = \theta$ 라 하면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{33})^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{5}$$

사각형 ABCD가 한 원에 내접하므로

$\angle BCD = \pi - \theta$ 이다. 따라서

$$\sin(\angle BCD) = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

삼각형 BCD의 넓이가 $2\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6}$$

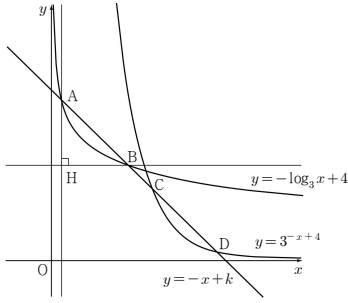
$$\text{따라서 } \overline{BC} \times \overline{CD} = 10$$

17. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 미정계수 구하는 문제 해결하기

함수 $y = -\log_3 x + 4$ 와 함수 $y = 3^{-x+4}$ 은 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 이고 $\overline{AD} - \overline{BC} = 4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$

점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이 만나는 점을 H라 하자.



직선 AB의 기울기가 -1이므로 $\overline{AH} = \overline{BH} = 2$ 따라서 점 A의 좌표를 $(a, -a+k)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(a+2, -a+k-2)$ 이다. 두 점 A, B는 함수 $y = -\log_3 x + 4$ 의 그래프 위의 점이므로

$$-a+k = -\log_3 a + 4 \quad \dots \text{㉑}$$

$$-a+k-2 = -\log_3(a+2) + 4 \quad \dots \text{㉒}$$

㉑, ㉒에 의하여

$$2 = \log_3 \frac{a+2}{a}, \quad a = \frac{1}{4}$$

이고 ㉑에 의하여

$$-\frac{1}{4} + k = -\log_3 \frac{1}{4} + 4$$

$$\text{따라서 } k = \frac{17}{4} + 2\log_3 2$$

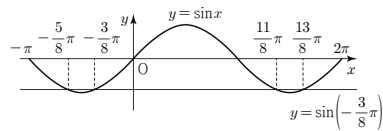
18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 부등식의 해 추론하기

$\sin x + \cos \frac{\pi}{8} < 0$ 에서 $\sin x < -\cos \frac{\pi}{8}$ 이다. 한편 $-\cos \frac{\pi}{8} = -\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = -\sin \frac{3\pi}{8} = \sin(-\frac{3\pi}{8})$ 이므로

$\sin x < -\cos \frac{\pi}{8}$ 의 해는 $\sin x < \sin(-\frac{3\pi}{8})$ 의 해와 같다.

한편 방정식 $\sin x = \sin(-\frac{3\pi}{8})$ 의 해는

함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \sin(-\frac{3\pi}{8})$ 와 만나는 점의 x 좌표와 같다.



그러므로 $-\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서

방정식 $\sin x = \sin(-\frac{3\pi}{8})$ 의 해는

$$x = -\frac{5\pi}{8} \text{ 또는 } x = -\frac{3\pi}{8} \text{ 또는}$$

$$x = \frac{11\pi}{8} \text{ 또는 } x = \frac{13\pi}{8} \text{이다.}$$

따라서 $-\pi \leq x \leq k$ 에서 $\sin x < \sin(-\frac{3\pi}{8})$ 를

만족시키는 모든 x 의 값의 범위가

$$-\pi - \alpha < x < \alpha \text{ 이기 위해서는 } \alpha = -\frac{3\pi}{8} \text{ 이고}$$

$$0 \leq k \leq \frac{11}{8}\pi \text{ 이어야 한다.}$$

그러므로 k 의 최댓값은 $\frac{11}{8}\pi$ 이다.

19. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 식의 값을 구하는 문제 해결하기

점 A는 직선 $y = 4$ 가 곡선 $y = a^{1-x}$ 과 만나는 점이므로 $4 = a^{1-x}$ 에서 $x = 1 - \log_a 4$

따라서 점 A의 좌표는 $(1 - \log_a 4, 4)$ 이다.

점 B는 직선 $y = 4$ 가 곡선 $y = 4^{1-x}$ 과 만나는 점이므로 $4 = 4^{1-x}$ 에서 $x = 0$

따라서 점 B의 좌표는 $(0, 4)$ 이다.

$$\text{그러므로 } \overline{AB} = -1 + \log_a 4$$

점 C는 직선 $y = k$ 가 곡선 $y = a^{1-x}$ 과 만나는 점이므로 $k = a^{1-x}$ 에서 $x = 1 - \log_a k$

따라서 점 C의 좌표는 $(1 - \log_a k, k)$ 이다.

점 D는 직선 $y = k$ 가 곡선 $y = 4^{1-x}$ 과 만나는 점이므로 $k = 4^{1-x}$ 에서 $x = 1 - \log_4 k$

따라서 점 D의 좌표는 $(1 - \log_4 k, k)$ 이다.

$$\text{그러므로 } \overline{DC} = \log_4 k - \log_a k$$

사각형 ADCB는 평행사변형이므로 $\overline{AB} = \overline{DC}$

$$\text{따라서 } -1 + \log_a 4 = \log_4 k - \log_a k,$$

$$\log_a 4 + \log_a k = \log_4 k + 1 \text{ 에서}$$

$$\log_a 4k = \log_4 k \text{ 이므로}$$

$$a = 4 \text{ 또는 } 4k = 1$$

그런데 $1 < a < 4$ 에서 $a \neq 4$ 이므로 $k = \frac{1}{4}$

사각형 ADCB의 넓이가

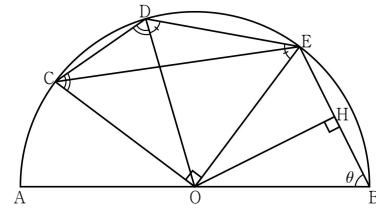
$$\overline{AB} \times (4 - k) = (-1 + \log_a 4) \times \frac{15}{4} = \frac{15}{2} \text{ 이므로}$$

$$-1 + \log_a 4 = 2$$

$$\log_a 4 = 3 \text{ 에서 } a^3 = 4, \quad a = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{따라서 } 4ak = 4 \times 2^{\frac{2}{3}} \times \frac{1}{4} = 2^{\frac{2}{3}}$$

20. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 삼각함수의 값을 구하는 문제 해결하기



$$\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = 1, \quad \angle COE = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CE} = \sqrt{2}, \quad \angle OCD = \angle ODC, \quad \angle ODE = \angle OED$$

$$\text{사각형 COED에서 } \angle OCD + \angle CDE + \angle OED = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

$$\angle OCD + \angle OED = \angle CDE \text{ 이므로}$$

$$2\angle CDE = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{즉}$$

$$\angle CDE = \frac{3\pi}{4}$$

한편 $\overline{CD} : \overline{DE} = 1 : \sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{CD} = a, \quad \overline{DE} = \sqrt{2}a \text{ (} a > 0 \text{)} \text{이라 하자.}$$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= a^2 + (\sqrt{2}a)^2 - 2 \times a \times \sqrt{2}a \times \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= 5a^2 \end{aligned}$$

이고 $\overline{CE} = \sqrt{5}a = \sqrt{2}$, 즉

$$a = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$\angle OBE = \theta$ 라 하고 점 O에서 선분 EB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{EB} = \overline{DE} = \sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{EB}}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

[다른 풀이]

$\overline{OB} = \overline{OD}$, $\overline{EB} = \overline{ED}$, \overline{OE} 는 공통이므로 삼각형 OBE와 삼각형 ODE는 합동이다.

$\angle OBE = \theta$ 라 하면

$$\angle OEB = \angle OED = \angle ODE = \theta,$$

$$\angle EOB = \angle DOE = \pi - 2\theta,$$

$$\angle COD = \frac{\pi}{2} - \angle DOE = \frac{\pi}{2} - (\pi - 2\theta) = 2\theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\angle ODC = \frac{1}{2}(\pi - \angle COD) = \frac{3}{4}\pi - \theta,$$

$$\angle CDE = \angle ODC + \angle ODE = \left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right) + \theta = \frac{3}{4}\pi$$

한편 $\overline{OC} = \overline{OE} = 1$, $\angle COE = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{CE} = \sqrt{2}$

$$\overline{CD} : \overline{DE} = 1 : \sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\overline{CD} = a, \quad \overline{DE} = \sqrt{2}a \text{ (} a > 0 \text{)} \text{이라 하자.}$$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CE}^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2 - 2 \times a \times \sqrt{2}a \times \cos \frac{3}{4}\pi = 5a^2$$

이고 $\overline{CE} = \sqrt{5}a = \sqrt{2}$, $a = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 즉

$$\overline{EB} = \overline{DE} = \sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 OBE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1^2}{2 \times 1 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

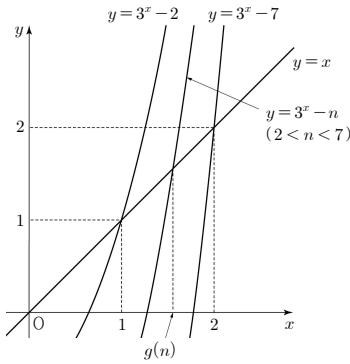
21. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 역함수 관계를 이용하여 자연수 추론하기

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $g(n)$ 은 직선 $y = x$ 가 함수 $f(x) = 3^x - n$ 의 그래프와 만나는 두 점의 x 좌표 중 큰 값과 같다.

또한 2 이상의 자연수 n 에 대하여 직선 $y = x$ 가 함수 $f(x) = 3^x - n$ 의 그래프와 만나는 두 점 중 한 점의 x 좌표는 양수이고 다른 한 점의 x 좌표는 음수이다. 따라서 $g(n)$ 은 직선 $y = x$ 가 함수 $f(x) = 3^x - n$ 의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점의 x 좌표와 같다. 곡선 $y = 3^x - n$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지나면 $1 = 3^1 - n$ 에서 $n = 2$ 이므로 $g(2) = 1$

(i) 곡선 $y = 3^x - n$ 이 점 $(2, 2)$ 를 지나면

$$2 = 3^2 - n \text{ 에서 } n = 7 \text{ 이므로 } g(7) = 2$$



$1 = g(2) < g(3) < \dots < g(6) < g(7) = 2$
따라서 $2 \leq n \leq 6$ 일 때,
 $1 \leq g(n) < 2$ 이므로 $h(n) = 1$
(ii) 곡선 $y = 3^x - n$ 이 점 $(3, 3)$ 을 지나면
 $3 = 3^3 - n$ 에서 $n = 24$ 이므로 $g(24) = 3$
 $2 = g(7) < g(8) < \dots < g(23) < g(24) = 3$
따라서 $7 \leq n \leq 23$ 일 때,
 $2 \leq g(n) < 3$ 이므로 $h(n) = 2$

(iii) 곡선 $y = 3^x - n$ 이 점 $(4, 4)$ 를 지나면
 $4 = 3^4 - n$ 에서 $n = 77$ 이므로 $g(77) = 4$
 $3 = g(24) < g(25) < \dots < g(76) < g(77) = 4$
따라서 $24 \leq n \leq 76$ 일 때,
 $3 \leq g(n) < 4$ 이므로 $h(n) = 3$
(iv) 곡선 $y = 3^x - n$ 이 점 $(5, 5)$ 를 지나면
 $5 = 3^5 - n$ 에서 $n = 238$ 이므로 $g(238) = 5$
 $4 = g(77) < g(78) < \dots < g(237) < g(238) = 5$
따라서 $77 \leq n \leq 237$ 일 때,
 $4 \leq g(n) < 5$ 이므로 $h(n) = 4$
(i)-(iv)에 의하여 $h(n) < h(n+1)$ 을
만족시키는 $2 \leq n \leq 100$ 인 모든 n 의 값의 합은
 $6 + 23 + 76 = 105$ 이다.

22. [출제의도] 지수 계산하기

$$(5^2 - \sqrt{3})^{2 + \sqrt{3}} = 5^{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 5^1 = 5$$

23. [출제의도] 로그함수가 포함된 방정식의 해 계산하기

$$\log_4(x-1) = 3 \text{ 에서 } x-1 = 4^3 = 64 \text{ 이므로 } x = 65$$

24. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

$$0 \leq x \leq 6 \text{ 에서 함수 } y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3) + 30 \text{ 은}$$

x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 감소하므로
 $x = 0$ 에서 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은
 $\log_{\frac{1}{3}} 3 + 30 = \log_{\frac{1}{3}} 3 + 30 = -\log_3 3 + 30 = 29$ 이다.

25. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

$$y = 6 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k = -6 \sin x + k \text{ 이고}$$

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{6}\pi, 9\right)$ 를 지나므로

$$9 = -6 \sin \frac{5}{6}\pi + k,$$

$$9 = -3 + k, \text{ 즉}$$

$$k = 12$$

26. [출제의도] 거듭제곱근의 정의를 이용하여 자연수의 합 추론하기

자연수 n 에 대하여 ${}^{n+1}\sqrt{8}$ 이
어떤 자연수의 제곱근이 되려면

$$\left({}^{n+1}\sqrt{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{1}{n+1}} = 2^{\frac{12}{n+1}} \text{ 이}$$

자연수이어야 한다.

따라서 $n+1$ 은 12의 약수이어야 하므로
 $n+1$ 이 될 수 있는 값은 2, 3, 4, 6, 12 이고
이를 만족시키는 모든 n 의 값의 합은
 $1 + 2 + 3 + 5 + 11 = 22$ 이다.

27. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

주어진 식에서 로그의 밑을 c 로 모두 변환하면

$$\log_a b = 81 \text{ 에서 } \frac{\log_c b}{\log_c a} = 81 \text{ 이므로}$$

$$\log_c b = 81 \times \log_c a \quad \text{㉠}$$

$$\log_c \sqrt{a} = \log_c \sqrt[6]{c} \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{2} \log_c a = \frac{1}{\log_c \sqrt{b}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \log_c b} \text{ 이므로}$$

$$4 = \log_c a \times \log_c b \quad \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에 의하여 } (\log_c b)^2 = 4 \times 81 \text{ 이고}$$

b 와 c 는 1보다 큰 실수이므로 $\log_c b > 0$

따라서 $\log_c b = 18$

28. [출제의도] 이차함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 식의 값 구하는 문제 해결하기

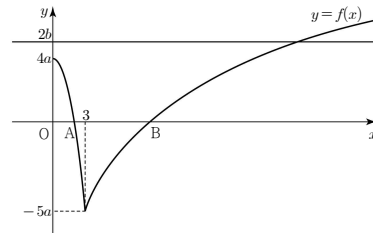
$0 \leq x < 3$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과
만나는 점의 x 좌표는 방정식 $a(4-x^2) = 0$ 의 실근과
같으므로 점 A의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

$\overline{AB} = 10$ 이므로 점 B의 좌표는 $(12, 0)$ 이다.

$f(12) = 0$ 이므로

$$b \log_2 \frac{12}{3} - 5a = 0,$$

$$2b = 5a$$



$0 \leq x < 3$ 에서 $-5a < f(x) \leq 4a$ 이고

$f(b) = 2b = 5a > 4a$ 이므로 $b > 3$

$$\text{그러므로 } f(b) = b \log_2 \frac{b}{3} - 5a = 2b,$$

$$b \log_2 \frac{b}{3} - 2b = 2b, \log_2 \frac{b}{3} = 4,$$

$$b = 3 \times 2^4 = 48, 5a = 2b = 96$$

$$\text{따라서 } 5a + b = 96 + 48 = 144$$

29. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 선분의 길이의 합 구하는 문제 해결하기

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R_1, R_1 = \frac{\overline{BC}}{2 \sin A}$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A} = 2R_2, R_2 = \frac{\overline{BD}}{2 \sin A}$$

$$R_1 : R_2 = 4 : 3 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\overline{BC}}{2 \sin A} : \frac{\overline{BD}}{2 \sin A} = 4 : 3, \text{ 즉}$$

$$\overline{BC} : \overline{BD} = 4 : 3$$

$\overline{BC} = 4k, \overline{BD} = 3k (k > 0)$ 이라 하면

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle CDB) = \frac{(2\sqrt{7})^2 + (3k)^2 - (4k)^2}{2 \times 2\sqrt{7} \times 3k} = \frac{-7k^2 + 28}{12\sqrt{7}k}$$

이고

$$\cos(\angle CDB) = \cos(\pi - \angle BDA)$$

$$= -\cos(\angle BDA) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

이므로

$$\frac{-7k^2 + 28}{12\sqrt{7}k} = -\frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$7k^2 - 21k - 28 = 7(k+1)(k-4) = 0$$

$$k > 0 \text{ 이므로 } k = 4$$

$$\text{따라서 } \overline{BC} + \overline{BD} = 4k + 3k = 28$$

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 조건에 맞는 합수 추론하기

함수 $y = 2 \sin \frac{\pi}{k} x$ 의 주기가 $2k$ 이고,

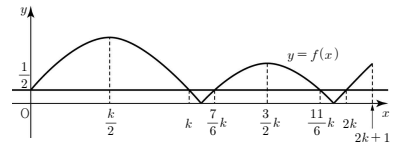
$$-2 \leq 2 \sin \frac{\pi}{k} x \leq 2 \text{ 이므로}$$

$$-\frac{3}{2} \leq 2 \sin \frac{\pi}{k} x + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$$

한편 $k > 1$ 이므로 $3k > 2k + 1$ 이고

$0 \leq x \leq 2k + 1$ 에서

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$0 \leq t < k$ 또는 $t > 2k - 1$ 이면

$t \leq x \leq t + 1$ 에서 $f(x) > \frac{1}{2}$ 인 x 의 값이 존재하므로

$f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 보다 크다.

$t = \alpha, t = \beta$ 일 때 $t \leq x \leq t + 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의

최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $k \leq \alpha < \beta \leq 2k - 1$

한편 $f(x) = \frac{1}{2}$, 즉 $\left| 2 \sin \frac{\pi}{k} x + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ 에서

$$\sin \frac{\pi}{k} x = 0 \text{ 또는 } \sin \frac{\pi}{k} x = -\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$k \leq x \leq 2k$ 에서 $f(x) = \frac{1}{2}$ 의 해는

$$x = k \text{ 또는 } x = 2k \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}k \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}k \text{ 이다.}$$

따라서 직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

만나는 점의 x 좌표는 $k, \frac{7}{6}k, \frac{11}{6}k, 2k$ 이다.

$$\frac{7}{6}k - k = 2k - \frac{11}{6}k = \frac{k}{6} \text{ 이고}$$

$t \leq x \leq t + 1$ 에서 $(t+1) - t = 1$ 이므로 다음과 같은
세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\frac{k}{6} > 1$ 일 때,

$$k \leq x \leq k + 1 \text{ 에서 } f(x) \leq f(k) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{7}{6}k - 1 \leq x \leq \frac{7}{6}k \text{ 에서 } f(x) \leq f\left(\frac{7}{6}k\right) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{11}{6}k \leq x \leq \frac{11}{6}k + 1 \text{ 에서 } f(x) \leq f\left(\frac{11}{6}k\right) = \frac{1}{2},$$

$$2k - 1 \leq x \leq 2k \text{ 에서 } f(x) \leq f(2k) = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$t \leq x \leq t + 1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이

되도록 하는 서로 다른 t 의 값은

$k, \frac{7}{6}k-1, \frac{11}{6}k, 2k-1$ 이다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{k}{6}=1$ 일 때,

$k=6, \frac{7}{6}k=7, \frac{11}{6}k=11, 2k=12$ 이므로

$6 \leq x \leq 7$ 에서 $f(x) \leq f(6) = \frac{1}{2}$,

$11 \leq x \leq 12$ 에서 $f(x) \leq f(11) = \frac{1}{2}$

따라서 $t \leq x \leq t+1$ 에서

$f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이 되도록 하는

모든 t 의 값은 6, 11 이다.

(iii) $\frac{k}{6} < 1$ 일 때,

$k+1 > \frac{7}{6}k, \frac{7}{6}k-1 < k,$

$\frac{11}{6}k+1 > 2k, 2k-1 < \frac{11}{6}k$ 이므로

$t \leq x \leq t+1$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 $\frac{1}{2}$ 이

되도록 하는 t 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $k=6, \alpha=6, \beta=11$ 이므로

$k\alpha + \beta = 6 \times 6 + 11 = 47$