• 수학 영역 •

수학 '가'형 정답

1	③	*2*	②	*3*	②	*4*	⑤	*5*	①
6	①	*7*	④	*8*	③	*9*	④	*10*	④
11	⑤	*12*	③	*13*	⑤	*14*	④	*15*	⑤
16	①	*17*	①	*18*	②	*19*	③	*20*	②
21	④	*22*	3	*23*	300	*24*	48	*25*	64
26	5	*27*	7	*28*	37	*29*	525	*30*	25

해 설

1. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(9n-5)}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=3$$

2. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 값을 구한다.

$\log_3 54+\log_9\frac{1}{36}=\log_3 54+\log_3\frac{1}{6}=\log_3 9=2$

3. [출제의도] 등차수열의 항을 구한다.

a_5는 a_3과 a_7의 등차중항이므로 $a_5=\frac{a_3+a_7}{2}=32$

4. [출제의도] 사건의 독립을 이용하여 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{10}$

5. [출제의도] 이항정리를 이용하여 계수를 구한다.

$\left(2x+\frac{a}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r(2x)^{7-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_7\mathrm{C}_r\,2^{7-r}a^r x^{7-2r}\ \ (0\le r\le 7)$

$7-2r=3$에서 $r=2$이므로 x^3의 계수는

${}_7\mathrm{C}_2\times 2^5\times a^2=21\times 32\times a^2=42$

따라서 $a^2=\frac{1}{16}$이고 $a>0$이므로 $a=\frac{1}{4}$

6. [출제의도] 매개변수로 나타낸 함수를 미분한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{t}}}{2t}=\frac{1}{t\sqrt{t}}$$

따라서 $t=4$일 때 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{8}$

7. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구한다.

주머니 A에서 공을 꺼내는 사건을 X, 주머니에서 흰 공을 꺼내는 사건을 Y라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{2}\times\frac{21}{50}=\frac{21}{100}$

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{21}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{14}{50}=\frac{35}{100}$

구하는 확률은 $\mathrm{P}(X|Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)}=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$

8. [출제의도] 로그가 포함된 부등식의 해를 구한다.

$\log_2(x^2-7x)-\log_2(x+5)\le 1$의 진수조건에서

$-5<x<0$ 또는 $x>7$ …… ㉠

$\log_2(x^2-7x)\le\log_2 2(x+5)$이므로

$x^2-7x\le 2x+10$, $x^2-9x-10\le 0$

$(x-10)(x+1)\le 0$, $-1\le x\le 10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le x<0$ 또는 $7<x\le 10$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는

$-1,\ 8,\ 9,\ 10$이므로 그 합은 26이다.

9. [출제의도] 역함수의 미분법을 이해한다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{e^k+2}=\frac{1}{4}$이므로 $e^k=2$, 즉 $k=\ln 2$

$f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x+2)^2}$이므로 $f'(\ln 2)=-\frac{1}{8}$

따라서 $g'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{f'(\ln 2)}=-8$

10. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

나열하는 카드에 적힌 문자의 종류에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) B와 C인 경우

C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.

(ⅱ) A와 B와 C인 경우

C가 적힌 카드가 2장일 때, C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 1장과 B가 적힌 카드 2장 및 A가 적힌 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다. C가 적힌 카드가 3장일 때, C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 1장 및 A가 적힌 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다. 따라서 이 경우의 수는 $12+12=24$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $6+24=30$이다.

11. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식을 푼다.

$\sin x=\sqrt{3}(1+\cos x)$, $\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$1-\cos^2 x=3(1+\cos x)^2$, $2(1+\cos x)(2\cos x+1)=0$

(ⅰ) $\cos x=-1$일 때, $\sin x=0$이고 $x=\pi$

(ⅱ) $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $x=\frac{2}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 모든 해의 합은 $\frac{5}{3}\pi$이다.

12. [출제의도] 적분과 미분의 관계와 합성함수의 미분을 이용하여 함숫값을 구한다.

주어진 식에서 $t=1$이면 $a^2-a=a(a-1)=0$

이때 $a\ne 0$이므로 $a=1$

주어진 식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f(\ln t)\times\frac{1}{t}=2(t\ln t+1)(\ln t+1)$

$f(\ln t)=2t(t\ln t+1)(\ln t+1)$, $\ln t=1$이면 $t=e$

따라서 $f(1)=2e(e+1)\times 2=4e^2+4e$

13. [출제의도] 정규분포의 성질을 이해한다.

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(ⅰ) $f(8)>f(14)$에서 $m<\frac{8+14}{2}$, 즉 $m<11$

(ⅱ) $f(2)<f(16)$에서 $m>\frac{2+16}{2}$, 즉 $m>9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 m은 자연수이므로 $m=10$

$\mathrm{P}(X\le 6)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6-10}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\le -1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.1587$

14. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n^2}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xf\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x(-\sin x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\Big[x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi-\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\times(-\pi)=-1$$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,a^t)\ (t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 (a^t,t)이다. $\angle\mathrm{PQR}=45°$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는 $(a^t,-t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\frac{1}{7}$이므로 $\frac{a^t+t}{t-a^t}=\frac{1}{7}$에서

$a^t=-\frac{3}{4}t$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2+(a^t+t)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$a^{2t}+t^2=\frac{25}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $t^2=4$이고 $t<0$이므로 $t=-2$

㉠에 대입하면 $\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2}$이고 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$

16. [출제의도] 배수의 성질을 이용하여 확률을 구한다.

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4=210$

1부터 10까지의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수의 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{3,6,9\}$, $A_1=\{1,4,7,10\}$, $A_2=\{2,5,8\}$

이다. 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니려면 집합 X는 세 집합 A_0, A_1, A_2 중 두 집합에서 각각 2개의 원소를 택하여 이 네 수를 원소로 해야 한다.

(ⅰ) A_0, A_1인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=18$

(ⅱ) A_0, A_2인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=9$

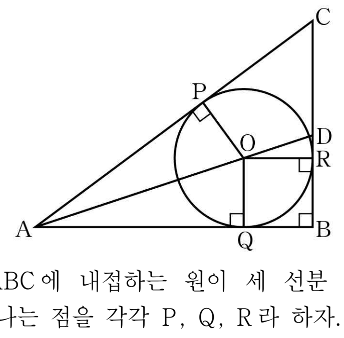
(ⅲ) A_1, A_2인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=18$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아닌 경우의 수는

$18+9+18=45$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

17. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이를 구한다.



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OR}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{DR}}=\overline{\mathrm{DB}}-\overline{\mathrm{RB}}=1$

$\overline{\mathrm{DO}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

$\sin(\angle\mathrm{DOR})=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

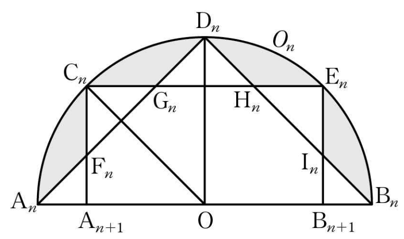
삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 1 : 3이므

로 $\overline{\mathrm{AQ}}=3\times\overline{\mathrm{OR}}=9$
이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AQ}}=9$, $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DAB}$
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}$, $12:(9+\overline{\mathrm{CP}})=4:(\overline{\mathrm{CR}}-1)$
$9+\overline{\mathrm{CP}}=3(\overline{\mathrm{CR}}-1)$
이때 $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CR}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{CR}}=6$, 즉 $\overline{\mathrm{CD}}=5$
직선 OR와 직선 AB가 평행하므로
$\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{DOR}$, 즉 $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DOR}$
삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $2R=\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=5\sqrt{10}$

$R=\dfrac{5\sqrt{10}}{2}$ 이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\dfrac{125}{2}\pi$이다.

18. **[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 급수의 합을 추론한다.**

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점을 O, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$이 두 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}$, $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$과 만나는 점을 각각 F_n, G_n이라 하고, 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$이 두 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$, $\mathrm{E}_n\mathrm{B}_{n+1}$과 만나는 점을 각각 H_n, I_n이라 하자.



반원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, n번째 색칠되는  모양의 도형의 넓이를 a_n이라 하자.
두 점 C_n, D_n이 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 4등분점이므로
$\angle\mathrm{C}_n\mathrm{OA}_{n+1}=45°$, $\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OD}_n=90°$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n}$

$\angle\mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}=90°$ 이므로 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{r_n}{\sqrt{2}}$

삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n\mathrm{H}_n$은 $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n}=\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{H}_n}$인 직각삼각형이고,

$$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n}^2=2(\overline{\mathrm{OD}_n}-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n})^2=2\left(r_n-\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=(\sqrt{2}-1)^2{r_n}^2$$

$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n}=(\sqrt{2}-1)r_n$
(삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n\mathrm{H}_n$의 넓이)
$=2\times$(삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{F}_n$의 넓이)
두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{F}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{I}_n$이 합동이므로
$a_n=$(반원 O_n의 넓이)$-$(사각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{E}_n$의 넓이)$-2\times$(삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n\mathrm{H}_n$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n}^2$$
$$=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\frac{2r_n}{\sqrt{2}}\times\frac{r_n}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)^2{r_n}^2$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right){r_n}^2$$

$r_{n+1}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{r_n}{\sqrt{2}}$ 이므로

$a_{n+1}=\left(\dfrac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_{n+1}^2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right){r_n}^2$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2\pi+8\sqrt{2}-16$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2\pi+8\sqrt{2}-16}{1-\frac{1}{2}}=4\pi+16\sqrt{2}-32$$

19. **[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명한다.**

(ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 $(*)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_m\mathrm{C}_k}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}+\boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}({}_m\mathrm{C}_k+{}_m\mathrm{C}_{k-1})}{k}+\boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\frac{\boxed{m!}}{(m-k+1)!(k-1)!}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{\boxed{m+1}}\times\frac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!}\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$f(m)=\dfrac{(-1)^m}{m+1}$, $g(m)=m!$, $h(m)=m+1$ 이므로

$\dfrac{g(3)+h(3)}{f(4)}=50$

20. **[출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 함수의 성질을 추론한다.**

$x\neq-1$일 때, $f'(x)=\dfrac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$

ㄱ. $n=3$이면 $x<-1$일 때, $f'(x)=\dfrac{3-6x^3}{(x^3+1)^2}>0$
이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다. (참)

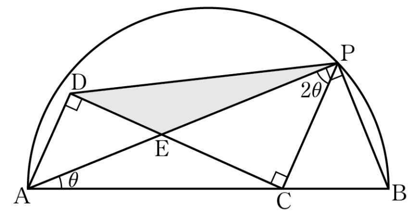
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)$이 성립한다.
n이 홀수일 때, $x\to-1$이면 (분모)$\to0$이고 (분자)$\to-n$이므로 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.
n이 짝수일 때, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\dfrac{n}{2}$이고
$f(-1)=-2$이므로 $n=4$이다.
따라서 $n=4$일 때만 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로 $f'(x)=\dfrac{4-12x^4}{(x^4+1)^2}$이다.
$x<0$일 때 $f(x)<0$이고, $x\geq0$일 때 함수 $f(x)$의 증가와 감소는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\sqrt[4]{27}$	↘

$2<\sqrt[4]{27}$이므로 방정식 $f(x)=2$는 $x\geq0$에서만 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f'(x)=0$에서 $x^n=\dfrac{1}{n-1}$ $(n\neq1)$
(ⅰ) n이 홀수일 때
함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않는다.
(ⅱ) n이 짝수일 때
$n=2$이면 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖지 않고,
$n\geq4$이면 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 구간 $(-1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n은 4, 6, 8, 10이므로 그 합은 28이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. **[출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한에 대한 문제를 해결한다.**



두 직각삼각형 PCE와 ADE는 닮음이므로
$\overline{\mathrm{EP}}:\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}:\overline{\mathrm{ED}}$에서 $\overline{\mathrm{EP}}\times\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{EA}}\times\overline{\mathrm{EC}}$

$\angle\mathrm{DEP}=\dfrac{\pi}{2}+2\theta$ 이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EP}}\times\overline{\mathrm{ED}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{EA}}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\cos2\theta$$

직각삼각형 APB에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta$
삼각형 ACP에서 $\angle\mathrm{ACP}=\pi-3\theta$ 이므로
사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin2\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin(\pi-3\theta)}$ 에서

$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{2\sin2\theta\cos theta}{\sin3\theta}$

삼각형 ACE에서 $\angle\mathrm{ACE}=\dfrac{\pi}{2}-3\theta$,

$\angle\mathrm{CEA}=\dfrac{\pi}{2}+2\theta$이고 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{EA}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{EC}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin2\theta\sin\theta\cos theta}{\sin3\theta\cos2\theta}$$
$$\overline{\mathrm{EA}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\frac{2\sin2\theta\cos theta\cos3\theta}{\sin3\theta\cos2\theta}$$
$$S(\theta)=\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos3\theta}{\sin^2 3\theta\cos2\theta}$$
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2 2\theta\sin\theta\cos^2\theta\cos3\theta}{\theta\sin^2 3\theta\cos2\theta}$$
$$=\frac{8}{9}\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin3\theta}\right)^2\left(\frac{\cos^2\theta\cos3\theta}{\cos2\theta}\right)$$
$$=\frac{8}{9}$$

22. **[출제의도] 합성함수의 도함수를 계산한다.**

$f'(x)=3\cos(3x-6)$ 이므로 $f'(2)=3\cos0=3$

23. **[출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 이해한다.**

$\mathrm{V}(X)=n\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}n=200$에서 $n=900$

따라서 $\mathrm{E}(X)=900\times\dfrac{1}{3}=300$

24. **[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해한다.**

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\tan(\pi-\theta)=\cos\theta\times(-\tan\theta)=-\sin\theta$

$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$ 이므로 $30(1-\sin\theta)=30\times\dfrac{8}{5}=48$

25. **[출제의도] 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구한다.**

모표준편차가 1이고 표본의 크기가 n일 때, 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\overline{x}-1.96\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$100(b-a)=100\times2\times1.96\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}=49$에서 $n=64$

26. [출제의도] 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

$A_n(n, 0)$, $B_n(n, 3)$에서 $\overline{OA_n}=n$, $\overline{OB_n}=\sqrt{n^2+9}$

직선 OB_n의 방정식은 $y=\dfrac{3}{n}x$이므로

점 C_n의 좌표는 $\left(1, \dfrac{3}{n}\right)$이고 $\overline{PC_n}=\dfrac{3}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{PC_n}}{\overline{OB_n}-\overline{OA_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{n^2+9}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+1\right)=\frac{2}{3}$$

$p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

27. [출제의도] 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 문제를 해결한다.

$A=B$이므로 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=0$

$\displaystyle\int_0^2 (2x+3)f'(x)dx$

$=\Big[(2x+3)f(x)\Big]_0^2-\displaystyle\int_0^2 2f(x)dx$

$=7f(2)-3f(0)-0=7$

28. [출제의도] 중복조합을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

A가 반드시 빵을 1개 이상 받는 경우의 수는 A에게 빵 1개와 우유 1개를 먼저 주고, 남은 빵 2개와 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수와 같다.

(ⅰ) A에게 남은 빵 2개를 주는 경우
남은 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=10$이다.

(ⅱ) A에게 남은 빵 2개 중 1개를 주는 경우
남은 빵 1개를 B 또는 C에게 나누어 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이므로 경우의 수는 $2\times 6=12$이다.

(ⅲ) A에게 남은 빵을 주지 않는 경우
남은 빵 2개를 B 또는 C 중 한 명에게 모두 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2={}_4C_2=6$이므로 경우의 수는 $2\times 6=12$이다.
또 남은 빵 2개를 학생 B와 C에게 각각 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 1이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개씩 주고 남은 우유 1개를 세 명의 학생에게 주는 경우의 수가 3이므로 경우의 수는 $1\times 3=3$이다.
따라서 A에게 남은 빵을 주지 않는 경우의 수는 $12+3=15$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$10+12+15=37$이다.

29. [출제의도] 수열의 합을 추론한다.

자연수 a, b, c에 대하여 $a<b$이고 조건 (나)에서 $a+b>c$이므로 $c\geq 4$이다.

(ⅰ) $c=2k\,(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 10)$인 경우
$b=2k-1$일 때 $2\leq a\leq 2k-2$
$b=2k-2$일 때 $3\leq a\leq 2k-3$
$\vdots$
$b=k+1$일 때 $a=k$
이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$(2k-3)+(2k-5)+(2k-7)+\cdots+3+1$
$=\dfrac{(k-1)\{(2k-3)+1\}}{2}=(k-1)^2$

(ⅱ) $c=2k+1\,(k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 9)$인 경우
$b=2k$일 때 $2\leq a\leq 2k-1$
$b=2k-1$일 때 $3\leq a\leq 2k-2$
$\vdots$
$b=k+2$일 때 $k\leq a\leq k+1$
이므로 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$(2k-2)+(2k-4)+(2k-6)+\cdots+4+2$
$=\dfrac{(k-1)\{(2k-2)+2\}}{2}=k(k-1)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=2}^{10}(k-1)^2+\sum_{k=2}^{9}k(k-1)$

$=\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{9}(2k^2-k)$

$=2\times\dfrac{9\times 10\times 19}{6}-\dfrac{9\times 10}{2}=525$

30. [출제의도] 치환적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=kx^2+px+q\,(p,\ q$는 상수$)$라 하면
$f(0)=f(-2)$이므로 $q=4k-2p+q$, $p=2k$
$f(0)\neq 0$이므로 $q\neq 0$
따라서 $f(x)=kx^2+2kx+q\,(k>0,\ q\neq 0)$
조건 (가)에서 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq 0$
$x\geq -1$일 때, $g(x)\leq mx+m$
$x<-1$일 때, $g(x)\geq mx+m$
이고, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(-1)=0$
$(-a+b)e^{f(-1)}=0$에서 $b=a$
$g(x)=(ax+a)e^{kx^2+2kx+q}$에서
$g'(x)=a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$
$g''(x)=2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+q}$
$a<0$, $k>0$이므로 모든 실수 x에 대하여
$g'(x)<0$이고, $x<-1$이면 $g''(x)>0$, $x>-1$이면 $g''(x)<0$이다. 조건 (가)에서 m의 최솟값이 -2이므로 $g'(-1)=-2$
$ae^{-k+q}=-2$ …… ㉠
조건 (나)의 $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$에서

$kx^2+2kx+q=t$라 하면

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_q^{3k+q}\frac{a}{2k}e^t dt$$

$$=\left[\frac{a}{2k}e^t\right]_q^{3k+q}=\frac{a}{2k}\left(e^{3k+q}-e^q\right)$$

㉠을 대입하면
$\dfrac{-2e^k}{2k}(e^{3k}-1)=\dfrac{e-e^4}{k}$, $-e^{4k}+e^k=e-e^4$
$e^{4k}-e^4-e^k+e=0$
$(e^k-e)\{(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1\}=0$
$(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1>0$이므로
$e^k-e=0$, 즉 $k=1$
조건 (나)에서

$$\int_{-2f(0)}^{1}g(x)dx-\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^{0}g(x)dx=0$$

$k=1$이므로 $x^2+2x+q=t$라 하면

$$\int_{-2f(0)}^{0}g(x)dx=\int_{4q^2-3q}^{q}\frac{a}{2}e^t dt$$

$$=\left[\frac{a}{2}e^t\right]_{4q^2-3q}^{q}=\frac{a}{2}\left(e^q-e^{4q^2-3q}\right)=0$$

$a\neq 0$에서 $q=4q^2-3q$이고 $q\neq 0$이므로 $q=1$
㉠에 대입하면 $ae^{-1+1}=-2$, $a=-2$
따라서 $a=-2$, $b=-2$, $f(x)=x^2+2x+1$이므로
$f(ab)=f(4)=16+8+1=25$