수학 ‘나’형 정답

1	②	2	③	3	①	4	④	5	④
6	⑤	7	②	8	⑤	9	④	10	③
11	④	12	⑤	13	①	14	②	15	–
16	③	17	①	18	③	19	①	20	②
21	⑤	22	9	23	15	24	24	25	257
26	10	27	84	28	160	29	135	30	80

※15번 문항은 서울시교육청의 결정(2020.10.30)에 따라 모두 정답으로 처리되었습니다

해 설

1. [출제의도] 로그의 값을 계산한다.

$\log_2\sqrt{8}=\log_2(2^3)^{\frac{1}{2}}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\log_2 2=\frac{3}{2}$

2. [출제의도] 중복순열과 중복조합의 값을 계산한다.

${}_4\Pi_2=4^2=16$, ${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$ 이므로

${}_4\Pi_2+{}_4\mathrm{H}_2=16+10=26$

3. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구한다.

$$\mathrm{P}(B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A|B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

4. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구한다.

미분계수의 정의에 의하여

$\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ 이므로 $f'(2)=3$

따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)$$
$$=2f'(2)$$
$$=6$$

5. [출제의도] 등차수열의 공차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1+2d$, $a_4=a_2+2d$, $a_5=a_3+2d$ 이므로

$a_3+a_4+a_5=a_1+a_2+a_3+6d$

즉, $6d=(a_3+a_4+a_5)-(a_1+a_2+a_3)=39-15=24$

따라서 $d=4$

6. [출제의도] 이항정리를 이용하여 식의 값을 구한다.

${}_4\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1\times3+{}_4\mathrm{C}_2\times3^2+{}_4\mathrm{C}_3\times3^3+{}_4\mathrm{C}_4\times3^4$

$=(1+3)^4=4^4=256$

7. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 교점의 좌표를 구한다.

두 함수의 그래프가 만나는 점의 y좌표가

같으므로 $\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ 이므로 $2\sin x=1$

즉, $\sin x=\frac{1}{2}$

그러므로 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 점의 x좌표의 합은 π

8. [출제의도] 함수의 그래프에서 좌극한과 우극한을 구한다.

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to0-}(x-1)=-1$ 에서

$$\lim_{x\to1+}f(x)-\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}f(x)-\frac{\lim\limits_{x\to0-}f(x)}{\lim\limits_{x\to0-}(x-1)}$$
$$=2-\left(\frac{4}{-1}\right)=6$$

9. [출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 독립시행의 확률을 구한다.

한 개의 동전을 6번 던져서 앞면이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 앞면이 0번 또는 1번 나오는 사건이므로 그 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)={}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{64}$$

따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{64}=\frac{57}{64}$

10. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$의 교점의 좌표는 방정식 $x^2=ax$에서 $(0,0)$, (a,a^2)

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^a|ax-x^2|\,dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{6}$$

11. [출제의도] 미분을 이용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결한다.

시각 t에서의 속도를 v라 하면

$x=t^3+kt^2+kt$에서 $v=3t^2+2kt+k$

$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$에서 $v=0$

그러므로 $3+2k+k=0$에서 $k=-1$

시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=6t+2k=6t-2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 가속도는 $6\times2-2=10$

12. [출제의도] 표본평균의 확률분포를 이용하여 확률을 구한다.

정규분포 $\mathrm{N}(104,4^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 과자 4상자의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(104,\frac{4^2}{4}\right)$ 즉, $\mathrm{N}(104,2^2)$을 따른다.

그러므로 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-104}{2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(a\le\overline{X}\le106)=\mathrm{P}\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le1\right)$

$\mathrm{P}(-0.5\le Z\le1)=0.5328$ 이므로 $\frac{a-104}{2}=-0.5$

따라서 $a=103$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

점 A의 좌표는 $(t,3^{2-t}+8)$, 점 B의 좌표는 $(t,0)$, 점 C의 좌표는 $(t+1,0)$, 점 D의 좌표는 $(t+1,3^t)$

사각형 ABCD가 직사각형이므로

점 A의 y좌표와 점 D의 y좌표가 같아야 한다.

즉, $3^{2-t}+8=3^t$

$(3^t)^2-8\times3^t-9=0$, $(3^t+1)(3^t-9)=0$

그런데 $3^t>0$이므로 $3^t=9$에서 $t=2$

그러므로 직사각형 ABCD의 가로의 길이는 1이고 세로의 길이는 $3^2=9$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 9

14. [출제의도] 절댓값을 포함한 등차수열의 합을 이용하여 항의 값을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\,(d>0)$이라 하면

$a_5=5$이므로 $a_3=5-2d$, $a_4=5-d$, $a_6=5+d$

$a_7=5+2d$

그러므로

$$\sum_{k=3}^{7}|2a_k-10|=|2a_3-10|+|2a_4-10|+|2a_5-10|$$
$$+|2a_6-10|+|2a_7-10|$$
$$=|-4d|+|-2d|+0+|2d|+|4d|$$
$$=12d=20$$

따라서 $d=\frac{5}{3}$ 이므로 $a_6=a_5+d=\frac{20}{3}$

15. [출제의도] 이산확률변수의 확률분포를 이용하여 평균을 구한다.

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=1+6^2=37$

▶15번 문항은 서울시교육청의 결정(2020.10.30)에 따라 모두 정답으로 처리되었습니다

16. [출제의도] 부정적분과 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$라 하면 (가)에서 $f(x)=2x+2a$

$g(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)dx=x^2+2ax+C$ (C는 적분상수)

(나)에서 $C-\int_0^1(t^2+2at+C)dt=\frac{2}{3}$

$C-\left(\frac{1}{3}+a+C\right)=\frac{2}{3}$에서 $a=-1$

$\int_0^1 g(t)\,dt=a$에서 $\left[\frac{1}{3}t^3-t^2+Ct\right]_0^1=-1$

즉, $C=-\frac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2-2x-\frac{1}{3}$

따라서 $g(1)=1-2-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$

17. [출제의도] 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

(가)에서 $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)g(x)+4\}=0$

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=-2g(1)=-4$에서 $g(1)=2$ …… ㉠

$g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$라 하면

$g'(x)=a$ …… ㉡

(나)에서 $g(0)=g'(0)$ 이므로 $b=a$

그런데 ㉠에서 $a+b=2$이므로 $a=1$, $b=1$

㉡에서 $g'(1)=1$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}$는 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수이므로

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

즉, $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2f'(1)-2=8$

따라서 $f'(1)=5$

18. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명한다.

집합 A_k의 원소의 개수는 k 이하의 자연수 중에서 2개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

$\boxed{(가)}={}_k\mathrm{C}_2=\frac{k(k-1)}{2}$

집합 $\{(1,k+1),(2,k+1),\cdots,(k,k+1)\}$에서 $k+1$이 k개이므로 그 합은 $k(k+1)$

즉, $\boxed{(나)}=k(k+1)$

그러므로 $f(k)=\frac{k(k-1)}{2}$, $g(k)=k(k+1)$

따라서 $f(10)+g(9)=45+90=135$

19. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 외

접원의 반지름의 길이를 구한다.

주어진 원이 삼각형 BCD 의 외접원이고 반지름의 길이가 r 이므로 사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}} = 2r\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2r\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,r$

삼각형 BCD 에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}r)^2$

$= (\sqrt{2})^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 - 2\times\sqrt{2}\times\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

이 식을 정리하면 $5r^2 + 2\sqrt{6}r - 6 = 0$

그러므로 $r = \dfrac{-\sqrt{6}\pm 6}{5}$

따라서 $r > 0$이므로 $r = \dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$

20. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$g'(x) = f(x) - \{f(x) + xf'(x)\} = -xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$ 는 이차항의 계수가 12 인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x) = -xf'(x)$ 에서 $g'(x)$ 는 최고차항의 계수가 -12 인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \le g(3)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3)=0$

그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x) = -12x(x-3)(x-a)$

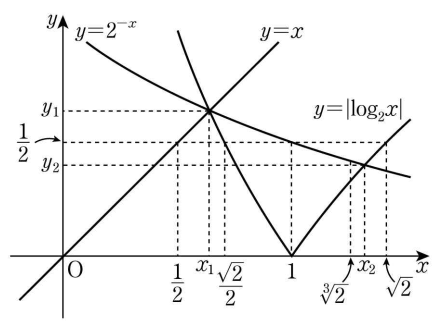
사차함수 $g(x)$ 가 오직 1 개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$

$g'(x) = -12x^2(x-3) = -12x^3 + 36x^2$

따라서 $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,dx = \Big[-3x^4 + 12x^3\Big]_0^1 = 9$

21. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 두 교점의 관계를 추론한다.

$y = 2^{-x}$, $y = |\log_2 x|$, $y = x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0 < x < 1$일 때,

두 곡선 $y = 2^{-x}$, $y = -\log_2 x$ 의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있으므로

$x_1 = y_1$이고 $x_1 < 1$, $y_1 < 1$

그림에서 $y = 2^{-x}$은 감소함수이므로

$2^{-1} < 2^{-x_1} = y_1$ 즉, $\dfrac{1}{2} < y_1 = x_1$

한편, $-\log_2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2} < y_1 = -\log_2 x_1$이고

$y = -\log_2 x$ 는 감소함수이므로 $x_1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $\dfrac{1}{2} < x_1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$ 이고 $\log_2\sqrt[3]{2} = \dfrac{1}{3}$

그런데 $8 < 9$ 이므로 $2^{\frac{3}{2}} < 3$ …… ㉠

$\sqrt[3]{2}$ 와 $\dfrac{3}{2}$ 을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3 < \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$이므로 $\sqrt[3]{2} < \dfrac{3}{2}$ 즉, $2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 3$ 이므로

$\log_2\sqrt[3]{2} < 2^{-\sqrt[3]{2}}$

그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2$

또, $\log_2\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2^{\sqrt{2}}}$ 이므로 $\log_2\sqrt{2} > 2^{-\sqrt{2}}$

그림에서 $x_2 < \sqrt{2}$

그러므로 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1 = x_1$ 이므로 ㄱ에서 $\dfrac{1}{2} < y_1 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2 = \log_2 x_2$ 이고 $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$,

$\log_2\sqrt[3]{2} < \log_2 x_2 < \log_2\sqrt{2}$ 이므로

$\dfrac{1}{3} < y_2 < \dfrac{1}{2}$

그러므로 $y_1 - y_2 < \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 정적분의 값을 구한다.

$\displaystyle\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 9$

23. [출제의도] 이항분포의 분산을 이용하여 시행 횟수를 구한다.

$\mathrm{V}(X) = n\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{4}$

$\mathrm{V}(2X+1) = 2^2\times\mathrm{V}(X) = n$

따라서 $n = 15$

24. [출제의도] 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구한다.

함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이므로 함수 $h(x)$ 가 $x=-1$ 과 $x=1$ 에서 연속이다.

그러므로 이차함수 $g(x)$ 는 $g(-1)=0$, $g(1)=0$ 을 만족해야한다.

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로

$g(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$

따라서 $g(5) = 5^2 - 1 = 24$

25. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

(i) $x \ne 1$ 일 때

$f(x) = (1 + x^4 + x^8 + x^{12})(1 + x + x^2 + x^3)$

$= \dfrac{(x^4)^4 - 1}{x^4 - 1}\times\dfrac{x^4-1}{x-1} = \dfrac{x^{16}-1}{x-1}$

(ii) $x = 1$ 일 때 $f(1) = 4\times 4 = 16$

따라서 $\dfrac{f(2)}{\{f(1)-1\}\{f(1)+1\}} = \dfrac{2^{16}-1}{(16-1)(16+1)}$

$= \dfrac{(2^8-1)(2^8+1)}{(2^4-1)(2^4+1)}$

$= 2^8 + 1$

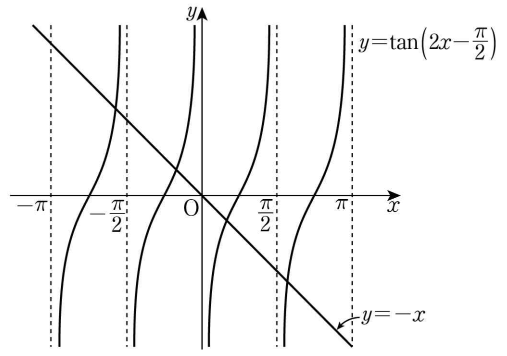
$= 257$

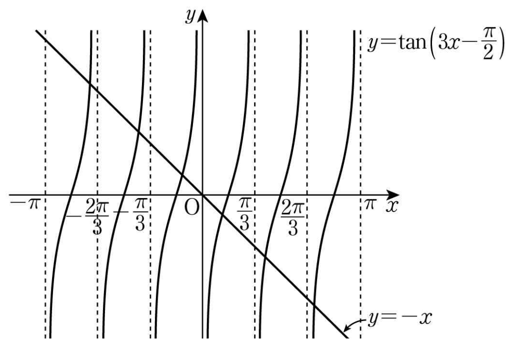
26. [출제의도] 삼각함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구한다.

$y = \tan\left(nx - \dfrac{\pi}{2}\right) = \tan n\left(x - \dfrac{\pi}{2n}\right)$ 의 주기는 $\dfrac{\pi}{n}$ 이고

$y = \tan\left(nx - \dfrac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y = \tan nx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2n}$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

아래 그림은 $n=2$, $n=3$ 일 때의 그래프이다.





그러므로 직선 $y = -x$ 와

$y = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_2 = 4$,

$y = \tan\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 개수는 $a_3 = 6$

따라서 $a_2 + a_3 = 4 + 6 = 10$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구한다.

(가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{14} = {}_{16}\mathrm{C}_2 = 120$

(나)에서 $a \ne 2$, $b \ne 2$, $c \ne 2$

(i) a, b, c 중 1개가 2인 경우

$a = 2$일 때, $b + c = 12$를 만족시키는 b와 c의 모든 순서쌍 (b, c) 의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_{12}$이고 $(2, 10)$, $(10, 2)$인 경우를 제외하면 ${}_2\mathrm{H}_{12} - 2 = 11$

$b = 2$, $c = 2$ 인 경우의 수도 각각 11 이므로 a, b, c 중 1 개가 2 인 경우의 수는 $11\times 3 = 33$

(ii) a, b, c 중 2개가 2인 경우

순서쌍 (a, b, c)를 구하면 $(2, 2, 10)$, $(2, 10, 2)$, $(10, 2, 2)$의 세 가지 경우가 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $120 - (33 + 3) = 84$

28. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 이용하여 방정식에 대한 문제를 해결한다.

$f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a = 6(x-1)(x-a)$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = a$

$f(1) = 2 - 3(a+1) + 6a = 3a - 1$,

$f(a) = 2a^3 - 3a^2(a+1) + 6a^2 = -a^2(a-3)$

이므로 삼차방정식 $f(x) = 0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 $f(1)f(a) = -a^2(3a-1)(a-3) < 0$

$a^2 > 0$ 이므로 $(3a-1)(a-3) > 0$

그런데 a 는 자연수이므로 $a > 3$

그러므로 $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, $\cdots$, $a_n = n + 3$

$a = a_n$ 일 때, $f(x) = 2x^3 - 3(a_n + 1)x^2 + 6a_n x$이고

$f(x)$는 $x = 1$ 에서 극댓값 $b_n = f(1) = 3a_n - 1$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{10}(2n + 5) = 160$

29. [출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

한 번의 시행 결과로 나타나는 경우의 확률은 다음과 같다.

① A 가 가진 공의 개수가 1 개 늘어나는 경우:

A 가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이고 B 가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이므로 확률은 $\dfrac{1}{4}$

② A가 가진 공의 개수의 변화가 없는 경우:
A, B가 던진 주사위의 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이므로 확률은 $\frac{1}{2}$

③ A가 가진 공의 개수가 1개 줄어드는 경우:
A가 던진 주사위의 눈의 수가 홀수이고 B가 던진 주사위의 눈의 수가 짝수이므로 확률은 $\frac{1}{4}$

한편, 4번째 시행 후 센 공의 개수가 처음으로 6이 되는 경우는 4번째 시행에서 ①이 일어나고 3번째 시행에서는 ① 또는 ②가 일어나야 한다.

(i) 3번째 시행에서 ①이 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ③이 일어나거나 두 시행 모두 ②가 일어나야 하므로
$\left\{2!\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

(ii) 3번째 시행에서 ②가 일어나는 경우
첫 번째, 두 번째 시행에서 ①, ②가 일어나야 하므로 $\left({}_2\mathrm{C}_1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

그러므로 구하는 확률은 $\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{7}{128}$

따라서 $p=128,\ q=7$이므로 $p+q=135$

30. [출제의도] 함수의 연속성과 적분의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases}-3x^3+3x^2 & (x<1)\\ 2x^2-8x+6 & (x\ge 1)\end{cases}$

위의 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1)\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

($C_1,\ C_2$는 적분상수)

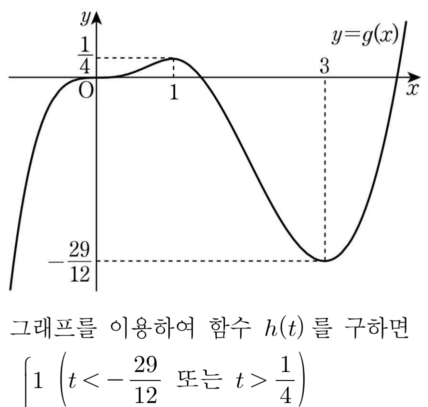
$g'(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$g(0)=0$에서 $C_1=0$이고 $-\frac{3}{4}+1=\frac{2}{3}-4+6+C_2$

에서 $C_2=-\frac{29}{12}$

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1)\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12} & (x\ge 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$를 구하면

$$h(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-\frac{29}{12}\ \text{또는}\ t>\frac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t=-\frac{29}{12}\ \text{또는}\ t=\frac{1}{4}\right)\\ 3 & \left(-\frac{29}{12}<t<\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 $\frac{1}{4}$과 $-\frac{29}{12}$뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

[참고] $g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$는 다음과 같이 구할 수도 있다.

(i) $x<1$일 때,
$g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$

(ii) $x\ge 1$일 때,
$g(x)$
$=\int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt+\int_1^x 2(t-1)(t-3)dt$
$=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12}$