• 2교시 수학 영역 •

1	①	**2**	④	**3**	③	**4**	②	**5**	④
6	②	**7**	⑤	**8**	③	**9**	②	**10**	⑤
11	⑤	**12**	③	**13**	②	**14**	③	**15**	⑤
16	②	**17**	①	**18**	③	**19**	④	**20**	①
21	④	**22**	8	**23**	5	**24**	12	**25**	6
26	61	**27**	20	**28**	15	**29**	7	**30**	49

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$2^{-1}\times 8^{\frac{2}{3}}=2^{-1}\times(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^{-1+2}=2$

2. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\tan\dfrac{x}{4}$의 주기는 $\dfrac{\pi}{\left|\dfrac{1}{4}\right|}=4\pi$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 3, $a_4=24$이므로

$a_4=3a_3$에서 $a_3=8$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$f(3)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1+1=2$

5. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$a_4=S_4-S_3=(4^3+4)-(3^3+3)=68-30=38$

6. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$\log 3x<2$, $\log 3x<\log 100$

상용로그의 밑이 1보다 크므로

$0<3x<100$, $0<x<\dfrac{100}{3}$

따라서 정수 x의 최댓값은 33

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

부등식 $5x-1<(x^2+1)f(x)<5x+2$에서

$\dfrac{5x-1}{x^2+1}<f(x)<\dfrac{5x+2}{x^2+1}$

$x>0$일 때, $\dfrac{x(5x-1)}{x^2+1}<xf(x)<\dfrac{x(5x+2)}{x^2+1}$이고

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(5x-1)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(5x+2)}{x^2+1}=5$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=5$

8. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\dfrac{1}{\log_a 2}=\log_2 a$이므로

$\log_2 8a=\dfrac{2}{\log_a 2}$에서 $\log_2 8+\log_2 a=2\log_2 a$

$\log_2 a=\log_2 8$

따라서 $a=8$

9. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

$f(x)$가 다항함수이므로

$\lim\limits_{x\to 2}(x+1)f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)\times\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

$=3\times\lim\limits_{x\to 2}f(x)=6$

에서 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=2$이고 $f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax-1)f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax-1)\times\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

$=(2a+3)\times 2=26$

에서 $a=5$

따라서 $a+f(2)=5+2=7$

10. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_1=4$

$a_1<6$이므로 $a_2=(a_1-1)^2=9$

$a_2\ge 6$이므로 $a_3=a_2-3=6$

$a_3\ge 6$이므로 $a_4=a_3-3=3$

$a_4<6$이므로 $a_5=(a_4-1)^2=4=a_1$

$a_5<6$이므로 $a_6=(a_5-1)^2=9=a_2$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로 $a_{10}=a_6=a_2=9$

11. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

양수 k의 세제곱근 중 실수인 것이 a이므로

$a=\sqrt[3]{k}$에서 $a=k^{\frac{1}{3}}$ … ㉠

a의 네제곱근 중 양수인 것이 $\sqrt[3]{4}$이므로

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[4]{a}$에서 $2^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{4}}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\frac{2}{3}}=\left(k^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=k^{\frac{1}{12}}$

따라서 $k=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12}=2^8=256$

12. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos(\pi-\theta)$

$=3\cos\theta+(-\cos\theta)=2\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 추론하기

함수 $g(x)$는 함수 $f(x)=\log_2(x+a)+b$의

역함수이므로 $g(x)=2^{x-b}-a$

곡선 $y=g(x)$의 점근선이 직선 $y=-a$이므로

$a=-1$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(3,2)$를 지나므로

$g(3)=2^{3-b}+1=2$에서 $b=3$

따라서 $a+b=-1+3=2$

14. [출제의도] 호도법을 활용하여 문제해결하기

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\pi=4\theta$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$S=\dfrac{1}{2}\times 4\times\pi=2\pi$

$T=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}}\times 4\times\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{OP}}$

$\dfrac{S}{T}=\pi$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$

15. [출제의도] 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$a_n=\sqrt[n+1]{\sqrt[n+2]{4}}=\left(2^{\frac{2}{n+2}}\right)^{\frac{1}{n+1}}=2^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$이므로

$\log_2 a_k=\log_2 2^{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}$

$=\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}=2\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

따라서

$\sum\limits_{k=1}^{10}\log_2 a_k=\sum\limits_{k=1}^{10}2\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=2\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{12}\right)\right\}$

$=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{5}{6}$

16. [출제의도] 삼각함수 이해하기

$3\sin\theta-4\tan\theta=4$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$3\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta=4\cos\theta$

$3\sin\theta\cos\theta=4(\sin\theta+\cos\theta)$ … ㉠

$9\sin^2\theta\cos^2\theta=16(1+2\sin\theta\cos\theta)$

$9\sin^2\theta\cos^2\theta-32\sin\theta\cos\theta-16=0$

$(9\sin\theta\cos\theta+4)(\sin\theta\cos\theta-4)=0$

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$ 또는 $\sin\theta\cos\theta=4$

$-1\le\sin\theta\le 1$, $-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

㉠에 의해 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{4}{9}\right)=-\dfrac{1}{3}$

【 다른 풀이 】

$3\sin\theta-4\tan\theta=4$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$3\sin\theta\cos\theta-4\sin\theta=4\cos\theta$

$3\sin\theta\cos\theta=4(\sin\theta+\cos\theta)$ … ㉠

한편 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$에서

㉠에 의해

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\dfrac{8}{3}(\sin\theta+\cos\theta)$

$3(\sin\theta+\cos\theta)^2-8(\sin\theta+\cos\theta)-3=0$

$\{3(\sin\theta+\cos\theta)+1\}\{(\sin\theta+\cos\theta)-3\}=0$

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $\sin\theta+\cos\theta=3$

$-1\le\sin\theta\le 1$, $-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

17. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

$\sum\limits_{k=1}^{20}a_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{12}a_{2k+8}$

$=(a_2+a_4+\cdots+a_{40})-(a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{32})$

$=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{34}+a_{36}+a_{38}+a_{40}$

등차중항의 성질에 의해

등차수열 $\{a_n\}$은 $m+l=42$인 두 자연수 m, l에

대하여 $a_m+a_l=2a_{21}$을 만족시키므로

$\sum\limits_{k=1}^{20}a_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{12}a_{2k+8}$

$=(a_2+a_{40})+(a_4+a_{38})+(a_6+a_{36})+(a_8+a_{34})$

$=2a_{21}+2a_{21}+2a_{21}+2a_{21}=48$

그러므로 $a_{21}=6$이고 $a_3+a_{39}=2a_{21}=12$

따라서 $a_{39}=12-a_3=11$

18. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

점 A는 두 곡선 $y=2^{x-3}+1$과 $y=2^{x-1}-2$가

만나는 점이므로

$2^{x-3}+1=2^{x-1}-2$, $3\times 2^{x-3}=3$에서 $x=3$

그러므로 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(3,2)$

점 B의 x좌표를 a라 하면

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(a, 2^{a-3}+1)$

두 점 B, C는 기울기가 -1인 직선 위의 점이고

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2}$이므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(a-1, 2^{a-3}+2)$

점 C는 곡선 $y=2^{x-1}-2$ 위의 점이므로

$2^{a-3}+2=2^{a-2}-2$, $2^{a-3}=4$에서 $a=5$

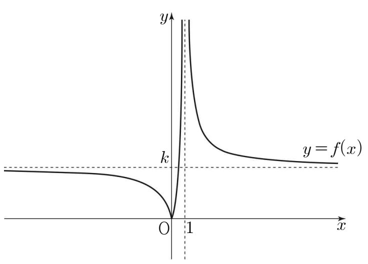
점 B$(5, 5)$는 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로
$k=10$
점 A$(3, 2)$와 직선 $y=-x+10$ 사이의 거리는
$\frac{|3+2-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}$

19. [출제의도] 수열의 합을 이용하여 추론하기

$a_3+a_5=2a_4$이므로 $a_3+a_5=2$에서 $a_4=\boxed{1}$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_1=1-3d,\ a_2=1-2d,\ a_3=1-d,$
$a_4=1,\ a_5=1+d$
$d>1$이므로 $a_1<0,\ a_2<0,\ a_3<0,\ a_5>0$
$\sum_{k=1}^{5}{a_k}^2$과 $\sum_{k=1}^{5}|a_k|$를 각각 d에 대한 식으로 나타내면
$\sum_{k=1}^{5}{a_k}^2$
$=(1-3d)^2+(1-2d)^2+(1-d)^2+1^2+(1+d)^2$
$=15d^2-10d+5$
$\sum_{k=1}^{5}|a_k|$
$=|1-3d|+|1-2d|+|1-d|+|1|+|1+d|$
$=(3d-1)+(2d-1)+(d-1)+1+(1+d)$
$=\boxed{7d-1}$
그러므로
$\sum_{k=1}^{5}\left({a_k}^2-5|a_k|\right)$
$=(15d^2-10d+5)-5(7d-1)$
$=15d^2-45d+10$
$=15\left(d-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{95}{4}$
$d>1$이므로 $\sum_{k=1}^{5}\left({a_k}^2-5|a_k|\right)$의 값이 최소가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$의 공차는 $\boxed{\frac{3}{2}}$이다.
따라서 $p=1,\ q=\frac{3}{2},\ f(d)=7d-1$이므로
$f(p+2q)=f(4)=27$

20. [출제의도] 함수의 극한 추론하기

$f(x)=\left|\frac{kx}{x-1}\right|=\left|\frac{k}{x-1}+k\right|$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $t<0$일 때
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 만나지 않으므로 $g(t)=0$
(ⅱ) $t=0$ 또는 $t=k$일 때
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 한 점에서 만나므로 $g(t)=1$
(ⅲ) $0<t<k$ 또는 $t>k$일 때
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 두 점에서 만나므로 $g(t)=2$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=k)\\ 2 & (0<t<k \text{ 또는 } t>k)\end{cases}$$

$\lim_{t\to0+}g(t)=2$이고, 모든 양수 a에 대하여
$\lim_{t\to a-}g(t)=2$이므로 $\lim_{t\to2-}g(t)=2$
$\lim_{t\to0+}g(t)+\lim_{t\to2-}g(t)+g(4)=5$에서
$g(4)=1$이므로 $k=4$
따라서 $f(3)=\left|\frac{4\times3}{3-1}\right|=6$

21. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 추론하기

$\overline{\mathrm{AP}}=a,\ \overline{\mathrm{BQ}}=b$라 하면 $\overline{\mathrm{CR}}=1-a-b$이고
$\overline{\mathrm{BP}}=1-a,\ \overline{\mathrm{AR}}=a+b$이다.
ㄱ. 삼각형 APR에서 코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{PR}}^2=a^2+(a+b)^2-2\times a\times(a+b)\times\cos\frac{\pi}{3}$
$=a^2+ab+b^2$
삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{PQ}}^2=b^2+(1-a)^2-2\times b\times(1-a)\times\cos\frac{\pi}{3}$
$=a^2+ab-2a+b^2-b+1$ ⋯ ㉠
$\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$이므로
$a^2+ab+b^2=a^2+ab-2a+b^2-b+1$에서
$2a+b=1$ ⋯ ㉡
그러므로 $2\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}}=1$에서 $4\overline{\mathrm{AP}}+2\overline{\mathrm{BQ}}=2$
$\overline{\mathrm{AP}}>0$이므로 $3\overline{\mathrm{AP}}+2\overline{\mathrm{BQ}}<2$ (거짓)
ㄴ. ㉡에서 $b=1-2a$이므로
$\overline{\mathrm{CQ}}=1-b=1-(1-2a)=2a$
$\overline{\mathrm{CR}}=1-a-(1-2a)=a$
삼각형 CRQ에서 $\overline{\mathrm{CQ}}:\overline{\mathrm{CR}}=2:1$이고
$\angle\mathrm{RCQ}=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 CRQ는
$\angle\mathrm{QRC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CQ}}^2-\overline{\mathrm{CR}}^2}=\sqrt{3}a$ (참)
ㄷ. 두 삼각형 PBQ, CRQ의 외접원의 반지름의 길이를 각각 $R_1,\ R_2$라 하면
삼각형 PBQ에서 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_1$
삼각형 CRQ에서 사인법칙에 의해
$\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_2$
삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배이므로 $R_1=\sqrt{2}\times R_2$
$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}\times\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$에서
$\overline{\mathrm{PQ}}^2=2\times\overline{\mathrm{QR}}^2$
㉠, ㉡에 의해 $\overline{\mathrm{PQ}}^2=3a^2-3a+1$이고
$\overline{\mathrm{QR}}^2=3a^2$이므로
$3a^2-3a+1=6a^2,\ 3a^2+3a-1=0$
$a=\frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{6}$
$a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{21}-3}{6}$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x-7}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+7)}{x-1}$
$=\lim_{x\to1}(x+7)=8$

23. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\log_2(x+1)+2$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 함수 $y=\log_2(x+1)+2$는
$x=7$일 때 최댓값 5를 갖는다.

24. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$4^a=\frac{4}{9}$에서 $2^a=\frac{2}{3}$
따라서 $2^{3-a}=2^3\times2^{-a}=8\times\frac{3}{2}=12$

25. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_5=3a_1$에서 $a_1+4d=3a_1,\ a_1=2d$ ⋯ ㉠
${a_1}^2+{a_3}^2=20$에서 ${a_1}^2+(a_1+2d)^2=20$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $5{a_1}^2=20$
${a_1}^2=4$에서 $a_1>0$이므로 $a_1=2$
따라서 $a_5=a_1+4d=3a_1=6$

26. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{10}a_k=3,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=9$에서
$\sum_{k=1}^{10}b_k=6$
따라서 $\sum_{k=1}^{10}(b_k+k)=\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}k=6+\frac{10\times11}{2}=61$

27. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

이차방정식 $x^2-k=0$의 두 근의 합이 0이므로
$6\cos\theta+5\tan\theta=0,\ 6\cos^2\theta+5\sin\theta=0$
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로
$6\sin^2\theta-5\sin\theta-6=0$
$(3\sin\theta+2)(2\sin\theta-3)=0$
$-1\le\sin\theta\le1$이므로 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$
이차방정식 $x^2-k=0$의 두 근의 곱이 $-k$이므로
$k=-6\cos\theta\times5\tan\theta=-30\sin\theta=20$

28. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$y=x^2$과 $y=tx$를 연립하여 정리하면
$x(x-t)=0$이고 $x>0$이므로 $x=t$
그러므로 점 Q의 좌표는 Q(t, t^2)
원점을 O라 하면
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{OQ}}=t\sqrt{1+t^2}$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}$
$x^2+y^2=2$와 $y=x^2$을 연립하여 정리하면
$(y+2)(y-1)=0$이고 $y>0$이므로 $y=1$
$x^2=1$에서 $x>0$이므로 $x=1$
그러므로 점 A의 좌표는 A$(1, 1)$
점 A에서 직선 $y=tx$에 내린 수선의 발을
H라 하면 $0<t<1$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{|t-1|}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}$

삼각형 PAQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AH}}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}\right)\times\dfrac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}$

이므로

$k=\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{S(t)}{(1-t)^2}$

$\quad=\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}}$

$\quad=\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{2-t^2(1+t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$

$\quad=\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{(t^2+2)(1-t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$

$\quad=\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{(t^2+2)(1+t)}{2\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$

$\quad=\dfrac{3\times2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3}{4}$

따라서 $20k=20\times\dfrac{3}{4}=15$

29. [출제의도] 함수의 연속을 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$과 $x=3$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$f(1)g(1)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)$

$\quad=(a^2-3a+2)(7-b)$

$\quad=(a-1)(a-2)(7-b)$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=(a^2-3a+2)(1+b)$

$\quad=(a-1)(a-2)(1+b)$

$f(1)g(1)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)$

이므로

$(a-1)(a-2)(7-b)=(a-1)(a-2)(1+b)$에서

$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $b=3$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속일 때

$f(3)g(3)=\lim\limits_{x\to3+}f(x)g(x)$

$\quad=(a^2-7a+10)(7-b)$

$\quad=(a-2)(a-5)(7-b)$

$\lim\limits_{x\to3-}f(x)g(x)=(a^2-7a+10)(3+b)$

$\quad=(a-2)(a-5)(3+b)$

$f(3)g(3)=\lim\limits_{x\to3-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to3+}f(x)g(x)$

이므로

$(a-2)(a-5)(7-b)=(a-2)(a-5)(3+b)$에서

$a=2$ 또는 $a=5$ 또는 $b=2$

(i), (ii)에서

$a=1$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $x=3$에서도 연속이기 위해서는 $b=2$

$a=2$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$과 $x=3$에서 모두 연속이므로 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$a=3$ 또는 $a=4$인 경우

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$과 $x=3$에서 모두 연속이 되도록 하는 b의 값은 존재하지 않는다.

$a=5$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이고, $x=1$에서도 연속이기 위해서는 $b=3$

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (a,b)는 $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(5,3)$이고 그 개수는 7이다.

30. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 추론하기

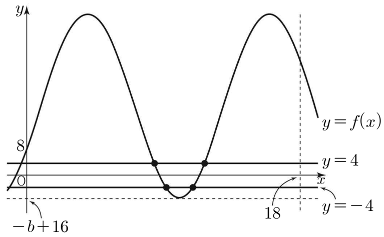
함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{\pi}{6}\right|}=12$이고,

$f(0)=-\dfrac{1}{2}a+b=8$에서 $a=2b-16$

$g(t)$의 값은 $0<x<t$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수이므로 $g(t)$의 값은 $0<x<t$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수와 $0<x<t$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수의 합과 같다.

(i) $a>0$일 때

$b>8$이므로 $f(18)=2b-8>8$이고, 함수 $f(x)$의 주기는 12이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



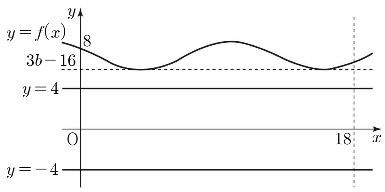
그러므로 함수 $f(x)$의 최솟값인 $-b+16$이 -4보다 작을 때 $g(18)$의 값은 최대이고 그 값은 4이다.

따라서 $a>0$일 때 $g(18)=5$를 만족시키는 두 실수 a, b가 존재하지 않는다.

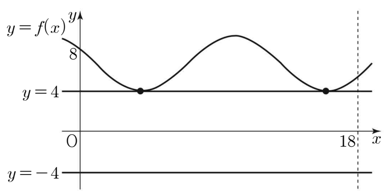
(ii) $a<0$일 때

$b<8$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값인 $3b-16$의 범위에 따른 $g(18)$의 값은 다음과 같다.

(a) $4<3b-16<8$일 때 $g(18)=0$

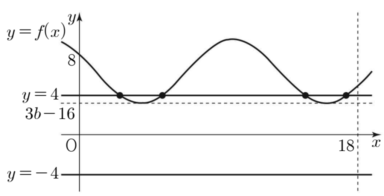


(b) $3b-16=4$일 때 $g(18)=2$



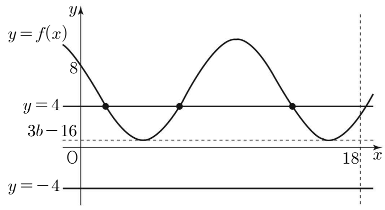
(c) $2<3b-16<4$일 때

$f(18)>4$이므로 $g(18)=4$



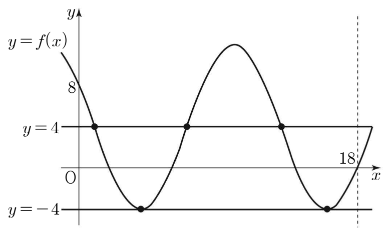
(d) $-4<3b-16\le2$일 때

$0<f(18)\le4$이므로 $g(18)=3$



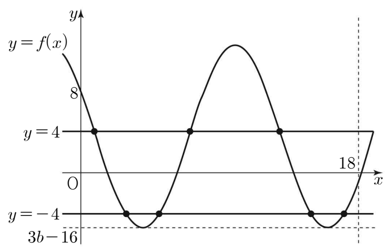
(e) $3b-16=-4$일 때

$f(18)=0$이므로 $g(18)=5$



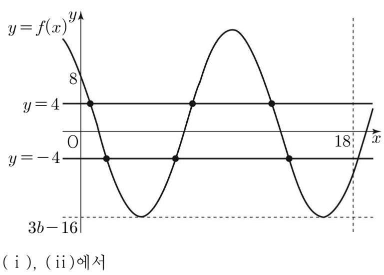
(f) $-10<3b-16<-4$일 때

$-4<f(18)<0$이므로 $g(18)=7$



(g) $3b-16\le-10$일 때

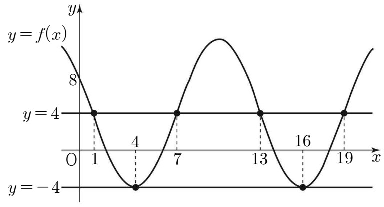
$f(18)\le-4$이므로 $g(18)=6$



(i), (ii)에서

$3b-16=-4$, 즉 $a=-8$, $b=4$일 때 $g(18)=5$이다.

그러므로 $f(x)=-8\sin\dfrac{\pi}{6}(x-1)+4$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(1)=f(7)=f(13)=4$이고 $f(4)=-4$이므로 $7<p\le13$인 실수 p에 대하여 $0<x<p$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=4$, $y=-4$와 만나는 점의 개수는 각각 2, 1이다.

그러므로 $g(\alpha)=|a-b|=12$, 즉 $0<x<\alpha$에서

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수와 $0<x<\alpha$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수의 합이 12가 되도록 하는 양수 α의 값의 범위는

$7+12\times3<\alpha\leq 13+12\times3$

$43<\alpha\leq 49$

따라서 양수 α의 최댓값은 49이다.